

UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES-INFORMATIQUE

COURS

présenté par :

MASSEYE GAYE

Titre :

THÉORIE ERGODIQUE

Table des matières

Introduction	4
1 Les tores	5
1 Introduction	6
2 Définition et structure algébrique	6
3 La topologie sur les tores	6
4 Application en tores	6
4.1 Applications continues à valeurs dans le tore	6
4.2 Applications continues d'un tore dans lui même	6
5 Mesures de Haar sur les tores	6
6 Les homomorphismes linéaires des tores	6
2 Exemples fondamentaux de systèmes dynamiques	7
1 Introduction	8
2 Système dynamiques topologiques et mesurables	8
3 Système de Kronecker	8
4 Système symboliques ou de Bernoulli	8
5 Mesures de Liouville et systèmes hamiltoniens	8
3 Récurrence	9
1 Introduction	10
2 Récurrence et manimalité	10
3 Récurrence multiple	10
4 Le théorème de récurrence de Poincaré	10
4 Ergodicité et unique ergodicité	11
1 Introduction	12
2 Ergodicité	12
2.1 Transformations ergodiques	12
2.2 Le théorème ergodique	12
2.3 Mesures invariantes et mesures ergodiques	12
3 Unique ergodicité	12

3.1	Transformations uniquement ergodiques	12
3.2	Unique ergodicité des translations du tore	12
5	Mélange	13
1	Introduction	14
2	Transformation mélangeantes	14
3	Transformations linéaires du tore	14
4	Fractions continues	14

Chapitre 1

Les tores

1 Introduction

Dans ce chapitre, on définit les tores et on donne leurs principales propriétés tant algébriques que topologiques. En particulier, on étudie les applications continues sur le tore ou à valeurs sur le tore. Ce qui nous conduit à introduire la notion fondamentale d'homotopie. Enfin on introduit la mesure Haar sur les tores, qui est l'équivalent de la mesure Lebesgue sur les espaces euclidiens

2 Définition et structure algébrique

3 La topologie sur les tores

4 Application en tores

4.1 Applications continues à valeurs dans le tore

4.2 Applications continues d'un tore dans lui même

5 Mesures de Haar sur les tores

6 Les homomorphismes linéaires des tores

Chapitre 2

Exemples fondamentaux de systèmes dynamiques

1 Introduction

Dans ce chapitre, on donne quelques exemples fondamentaux de système dynamiques qui serviront de motivation et d'illustration tout au long de ce cours.

2 Système dynamiques topologiques et mesurables

3 Système de Kronecker

4 Système symboliques ou de Bernoulli

5 Mesures de Liouville et systèmes hamiltoniens

Chapitre 3

Récurrance

- 1 Introduction
- 2 Récurrence et minimalité
- 3 Récurrence multiple
- 4 Le théorème de récurrence de Poincaré

Chapitre 4

Ergodicité et unique ergodicité

1 Introduction

2 Ergodicité

2.1 Transformations ergodiques

2.2 Le théorème ergodique

2.3 Mesures invariantes et mesures ergodiques

3 Unique ergodicité

3.1 Transformations uniquement ergodiques

3.2 Unique ergodicité des translations du tore

Chapitre 5

Mélange

- 1 Introduction
- 2 Transformation mélangeantes
- 3 Transformations linéaires du tore
- 4 Fractions continues

Bibliographie

- [1] B.Bekka, M.Mayer, *Ergodic theory and topological dynamics of group actions on homogeneous spaces*. LMS LNS **229**, Cambridge Univ.Press, 2000
- [2] I. Benoist, F. Paulin *Système dynamiques élémentaires*. Notes de cours (pages web).
- [3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*. Masson, 1983
- [4] G Brianc, G. Pages, *Mesure et intégration*. Princeton Univ.Press,1981
- [5] A.Fathi, *Système dynamiques*. Majeure de Mathématiques, Editions 1996
- [6] H.Furstenberg, *Reccurence in ergodic theory and combinatorial number theory*. Princeton Univ.Press,1981
- [7] Ya.G.Sinai, *Introction to ergodic theory*. Princeton Univ.Press,1976
- [8] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*. Hermann, 1951