Directeur de Thèse : Alain Yger (Univ. de Bordeaux 1.)
Co-directeurs de Thèse : Salomon Sambou, Daouda N. Diatta (Univ. de Ziguinchor.)

Calcul « max-plus », variétés « tropicales » et fonctions de Ronkin

Étant donnés un polynôme de Laurent à coefficients complexes en n variables,

$$F = \sum_{\underline{\alpha} \in \mathbb{Z}^n} \xi_{\underline{\alpha}} X^{\underline{\alpha}},$$

on lui associe une fonction convexe

$$R^F \ : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \int_{(\mathbb{S}^1)^n} \log |F(u_1 x_1, ..., u_n x_n)| \, d\sigma_{(\mathbb{S}^1)^n}(u),$$

où $d\sigma_{(\mathbb{S}^1)^n}$ désigne la mesure de Haar normalisée sur le tore réel $(\mathbb{S}^1)^n$. Cette fonction convexe se trouve être <u>affine</u> dans chaque composante connexe du complémentaire (dans le monde $\mathbb{R}^n$) de l'image de l'ensemble algébrique $V(F) := \{z \in (\mathbb{C}^*)^n \, ; \, F(z) = 0\}$ par l'application multi-logarithme $\text{Log} \ : \ z \mapsto (\log |z_1|, ..., \log |z_n|)$; il y a un nombre fini de telles composantes connexes $C_\gamma \subset \mathbb{R}^n$ et l'on a, dans chaque telle C_γ, $R^F(x) = \langle \alpha_{F,\gamma} \, , \, x \rangle + c_{F,\gamma}$, où $c_{F,\gamma}$ est un nombre réel (sur lequel on ne sait malheureusement pas grand chose) et $\alpha_{F,\gamma}$ est un point à coordonnées entières appartenant à l'enveloppe convexe du support de F (deux composantes connexes différentes correspondant à des « pentes » $\alpha_{F,\gamma}$ différentes). Si l'on se place sous l'angle non plus du calcul algébrique classique, mais sous celui du calcul dit « max-plus » (ou encore « tropical ») dans l'ensemble $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^n$ (où l'addition usuelle est remplacée par l'addition « tropicale » $a \oplus b = \max(a, b)$ et la multiplication usuelle par la multiplication « tropicale » $a \otimes b := a + b$), la fonction polynomiale tropicale « schématisant » en quelque sorte la fonction (plutôt compliquée) R^F est la fonction

$$R^F_{\text{sq}} \ : (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto \max_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \left(\langle \alpha_{F,\gamma}, x \rangle + c_{F,\gamma} \right)$$

(« sq » pour « squelette »). Le lieu singulier de cette nouvelle fonction convexe R^F_{sq} (beaucoup plus simple que ne l'est la fonction R^F qu'elle « schématise ») se présente comme l'union S des cellules de dimension n d'un complexe polyédral de $\mathbb{R}^n$. Les travaux de M. Passare et H. Rullgård montrent que le fermé $\text{Log}\, V(f)$ de $\mathbb{R}^n$ se rétracte (au sens fort) sur ce « squelette » S. Des études numériques (qui seront conduites dans ce projet de thèse) montrent cependant que cette approximation de R^F par R^F_{sq} s'avère sans doute trop simpliste : le calcul numérique (par exemple celui du laplacien de R^F), couplé avec les techniques de traitement d'image (conduits dans ce projet sous les deux logiciels de calcul scientifique que sont `Scilab` ou `MATLAB`), montre que le comportement de R^F dans le fermé $\text{Log}(V(F))$ met en évidence des phénomènes que l'objectif de cette thèse sera précisément de clarifier : mise en évidence du « contour », analyse de la déformation de ce contour lors de l'apparition ou de la disparition de composantes C_γ associées à un point $\alpha_{F,\gamma}$ lorsque les coefficients $\xi_{\underline{\alpha}}$ de F varient, etc. On proposera une schématisation plus précise de R^F toujours sous forme d'une fonction polynomiale tropicale $\tilde{R}^F_{\text{sq}}$ telle que

$$R^F_{\text{sq}} \leq \tilde{R}^F_{\text{sq}} \leq F \, ,$$

mais de manière cette fois à faire en sorte (lorsque $n = 2$) que les caractéristiques géométriques de la courbe algébrique $V(F)$ (par exemple son genre) se retrouvent dans la courbe tropicale (un graphe pondéré dans ce cas) décrite comme le lieu singulier de $\tilde{R}^F_{\text{sq}}$. On envisagera également dans cette thèse le cas où F est remplacé par un m-uplet $(F_1, ..., F_m)$ de polynômes de Laurent telles que les hypersurfaces algébriques $V(F_j)$ se coupent proprement en envisageant une schématisation tropicale de la fonction convexe

$$x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \int_{(\mathbb{S}^1)^n} \log \|F(u_1 x_1, ..., u_n x_n)\| \, d\sigma_{(\mathbb{S}^1)^n}(u) \, .$$

Ce sujet de thèse se situe délibérément au carrefour de la géométrie algébrique, de la géométrie convexe ainsi que de l'analyse numérique. Les problèmes de « déformation » (dans l'échelle logarithmique) des ensembles algébriques a priori complexes à représenter en des « squelettes » simples à décrire (car relevant de la combinatoire ou de la théorie des graphes) en constituent la trame principale. Ce sujet, de part son aspect transverse, se veut ouvrir à l'étudiant un spectre mathématique à la fois large et diversifié, ce à partir de questions se formulant simplement.

Références.

[PR] M. Passare, H. Rullgård, Amœbas, Monge-Ampère measures, and triangulations of the Newton polytope, Duke Math. Journal, 121, 3 (2004), 481-507.
[Purb] K. Purbhoo, A Nullstellensatz for amœbas, Duke Mathematical Journal 141 (2008), no.3, 407-445.
[Y] A. Yger, Tropical geometry and amœbas, Cours de Master 2, Bordeaux 2012, en ligne sur `https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00728880v2` [voir la bibliographie ici pour d'autres références].