

DYNAMIQUE DES APPLICATIONS POLYNOMIALES À UNE VARIABLE

CHARLES FAVRE

1. EXPOSÉ 1: THÉORIE DE FATOU-JULIA COMPLEXE

Le contexte: on itère $P(z) = z^d + a_1 z^{d-1} + \dots + a_d$ avec $a_i \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$.

1.1. Définition de l'ensemble de Julia rempli, de l'ensemble de Julia et de l'ensemble de Fatou et premières propriétés

Lecture pour les bases en analyse complexe (formule de Cauchy, théorème de Montel, forme locale des applications holomorphes).

- W. Rudin. *Real and complex analysis*. Chapitre 10.
- C. Favre. *Surfaces de Riemann et théorie des revêtements*. Chapitre A.1. Les notes sont disponibles ici: <https://surfriemann.wordpress.com/>

Pour tracer des ensembles de Julia dans le cas de polynômes quadratiques et pour se promener dans l'ensemble de Mandelbrot, voici quelques programmes téléchargeables gratuitement:

- <http://matek.hu/xaos/doku.php>
- <http://www.mndynamics.com/indexp.html>
- <https://www.math.kyoto-u.ac.jp/inou/qfract/>
- <http://dhushara.com/DarkHeart/>
- <http://www.math.harvard.edu/ctm/programs/index.html>
- <https://fractint.org/>

J'ai utilisé les deux premiers dans mon exposé.

1.2. Les points périodiques, multiplicateurs. Caractérisation des points périodiques appartenant à l'ensemble de Julia.

Lecture:

- J. Milnor. *Dynamics in one complex variable. Introductory Lectures*. Chapitres 6, 7 & 8.
- L. Carleson et Gamelin. *Complex Dynamics*. Chapitre II 1 – 6.

2. EXPOSÉS 2 & 3: DYNAMIQUE DANS LES ENSEMBLES DE FATOU ET DE JULIA

2.1. Théorème de non-errance et classification de la dynamique dans l'intérieur de l'ensemble de Julia rempli

Lecture:

- J. Milnor. *Dynamics in one complex variable. Introductory Lectures*. Chapitres 11, 12 & 13.
- L. Carleson et Gamelin. *Complex Dynamics*. Chapitre IV.

2.2. La dynamique sur l'ensemble de Julia est chaotique: résultats de base de la théorie ergodique des polynômes. Construction d'une mesure invariante. Equidistribution des pré-images des points. Densité des orbites génériques. Explosion de la dérivée le long d'une orbite générique.

Lecture sur le théorème ergodique de Birkhoff:

- P. Walters. *An introduction to ergodic theory*. Chapitre 1.6

Lecture sur les fonctions sous-harmoniques à une variable:

- L. Hörmander. *An introduction to complex analysis in several complex variables*. Chapitre I. 6.

Lecture sur l'équidistribution des pré-images, et l'expansion le long des orbites.

- C. Favre. *Equidistribution problems in holomorphic dynamics*. Section 1. Les notes sont disponibles ici: <http://www.cmls.polytechnique.fr/perso/favre/equi.pdf>
- V. Guedj. *Propriétés ergodiques des applications rationnelles*. Chapitre 1. Les notes sont disponibles ici: <https://arxiv.org/pdf/math/0611302.pdf>

3. EXPOSÉ 4: CORPS MÉTRISÉS NON-ARCHIMÉDIENS ET ÉLÉMENTS DE DYNAMIQUE

3.1. Corps métrisés. Définition. Exemples. Complétion et extensions finies.

Lecture sur les extensions finies et les normes.

- S. Bosch, U. Güntzer, et R. Remmert. *Non-Archimedean analysis*. Chapitre 3.2.

Lecture sur les corps p -adiques, extension finie de \mathbb{Q}_p .

- A. Robert *A course in p -adic analysis*. Chapitres 1, 2 & 3.

3.2. La droite affine au sens de Berkovich. Définition en termes de boules. Structure d'arbre.

Lecture sur les espaces de Berkovich

- M. Jonsson. *Dynamics on Berkovich Spaces in Low Dimensions*. Sections 3, 4 & 5.
- M. Baker et R. Rumely. *Potential Theory on the Berkovich Projective Line*. Chapitres 1 & 2.
- V. Berkovich. *Spectral Theory and Analytic Geometry Over Non-Archimedean Fields*. Chapter 1.

3.3. Action d'un polynôme. Ensemble de Julia et de Fatou. La mesure d'équilibre et la théorie ergodique.

Lecture:

- M. Baker et R. Rumely. *Potential Theory on the Berkovich Projective Line*. Chapitre 10.
- C. Favre et J. Rivera-Letelier. *Équidistribution quantitative des points de petite hauteur sur la droite projective*. Math. Ann. 335, 311 – 361 (2006).
- R. Benedetto. *Dynamics in one non-Archimedean variable*. Livre en préparation.

3.4. Point fixe. Composantes de Fatou.

Lecture:

- R. Benedetto. *Wandering domains in non-Archimedean polynomial dynamics*. Bulletin of the London Mathematical Society, 38 (2006), 937 – 950.
- R. Benedetto. *Wandering domains and nontrivial reduction in non-Archimedean dynamics*. Illinois Journal of Mathematics 49 (2005), 167 – 193.

- R. Benedetto. *Dynamics in one non-Archimedean variable*. Livre en préparation.

CMLS, ÉCOLE POLYTECHNIQUE, CNRS, UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY, 91128 PALAISEAU CEDEX, FRANCE
E-mail address: `charles.favre@polytechnique.edu`