Singularités plurisousharmoniques

Alexander Rashkovskii

Résumé

Notes de cours sur le comportement des fonctions plurisousharmoniques au voisinage des points où elles prennent la valeur $-\infty$. École CIMPA de Ziguinchor, Sénégal, 20/11/2017 – 2/12/2017.

Un exemple type de fonction plurisousharmonique (*psh*) est la fonction $u = \log|f|$, où f est une fonction holomorphe, et au comportement de f au voisinage de l'ensemble de ses zéros Z_f correspond dans le cadre général le comportement d'une fonction plurisousharmonique u au voisinage des points où $u = -\infty$, points que l'on appelle *singularités* de u.

Considérées au sens des distributions, les fonctions $\log|f|$ jouent le rôle de potentiels relativement aux ensembles Z_f. Dans le cas le plus simple où f est une fonction holomorphe, le passage $f \mapsto Z_f$ se réalise en appliquant l'opérateur de Laplace à $\log|f|$, ce qui fournit une mesure supportée par Z_f et de densité égale à la multiplicité de la fonction le long de la composante correspondante de son ensemble de zéros. L'étape suivante consiste à interpréter l'objet ainsi construit comme le courant d'intégration $[Z_f]$ (les multiplicités étant prises en compte). Cette approche fonctionne également dans le cas général. En 1957, Pierre Lelong a prouvé que la mesure trace d'un courant positif fermé possède une densité en tout point de son support. Les principaux objets d'étude étaient les courants d'intégration sur des variétés analytiques ; dix ans plus tard, on a montré que les densités dans ce cas coïncidaient avec les multiplicités de ces variétés, et on les appelle depuis *nombres de Lelong* [Th67]. La notion s'est révélée d'une grande importance. Elle réalise en particulier un puissant lien entre les objets analytiques et géométriques de l'analyse complexe moderne. Voir le point de vue de P. Lelong sur le sujet dans [Le94], [Le95] ; une série de ses travaux afférents est présentée dans [Le98].

Les développements ultérieurs dans ce domaine reposent sur la technique des opérateurs de Monge-Ampère, la contribution majeure étant due à Demailly, voir [Dbook]. Parmi des applications diverses, mentionnons celles relatives à la géométrie algébrique et à la théorie des nombres.

Les exposés qui suivent proposent une introduction aux principaux aspects de la théorie des singularités des fonctions psh (singularités psh, pour faire bref) ; ce que nous entendons par là est le *comportement des fonctions/courants au voisinage de leurs points singuliers* plutôt que la description des ensembles de points singuliers (bien que cette description entrera en jeu dans le tableau). Nous sommes ici intéressés par diverses caractéristiques de ces singularités, telles les nombres de Lelong et leurs généralisations (en particulier ceux attachés à des courants positifs fermés), les indicatrices locales, les seuils log-canoniques et les interactions entre ces divers concepts.

Des notions de base sur les fonctions psh et les courants positifs sont requises ; le lecteur peut se référer à [B93], [BłLN1], [BłLN2], [GuZe17], [H94], [K00a], [Kl91], [Ko98], [Le69], [LeGr86].

Table des matières

1 Nombres de Lelong pour les fonctions psh

On introduit ici les nombres de Lelong pour les fonctions psh et leurs propriétés élémentaires. Les sections 1.1 - 1.4 contiennent des résultats standard que l'on trouvera par exemple dans [BłLN1], [GuZe17], [H94], [Le98], [LeGr86] ; pour les sections 1.5 et 1.6, voir [K94] et [LeR99] respectivement.

1.1 Fonctions psh

Du fait que l'on traitera principalement de situations locales, nous nous restreignons aux fonctions dans les domaines de $\mathbb{C}^n$. Durant tout l'exposé, Ω sera un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ et u une fonction *plurisousharmonique* (*psh*) dans Ω, c'est-à-dire une fonction semi-continue supérieurement de Ω dans $[-\infty, +\infty[$ dont la restriction à toute droite complexe L est sous-harmonique dans $\Omega \cap L$. La classe des fonctions psh dans Ω est notée $\mathrm{PSH}(\Omega)$. Toute fonction psh est localement intégrable et la topologie de $\mathrm{PSH}(\Omega)$ est induite par la L^1_{loc}-convergence (ou, de manière équivalente, la convergence faible sur les fonctions continues – ou C^∞ – à support compact).

Notation 1.1.1 Pour tout $r > 0$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose :
$\mathbb{B}_r(x) = \{x \in \mathbb{C}^n : |x| < r\}$, $\mathbb{S}_r(x) = \partial\mathbb{B}_r(x)$, $\mathbb{B}_r := \mathbb{B}_r(0)$, $\mathbb{S}_r := S_r(0)$;
$\tau_p = \pi^p/p!$ est le $2p$-volume de la boule unité dans $\mathbb{C}^p$;
$\omega_p = 2\pi^p/(p-1)!$ est le $(2p-1)$-volume de la sphère unité dans $\mathbb{C}^p$;
dS est la mesure de Lebesgue sur les hypersurfaces réelles lisses de $\mathbb{C}^n$.

1.2 Définition du nombre de Lelong et propriétés élémentaires

Notation 1.2.1 Soit $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$, $x \in \Omega$, et $t < \log \mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega)$, on note

$$\Lambda(u, x, t) = \sup\{u(z) : z \in \mathbb{B}_{e^t}(x)\},$$

qui est aussi le maximum de u sur $\mathbb{S}_{e^t}$, et

$$\lambda(u, x, t) = \omega_n^{-1} \int_{\mathbb{S}_1} u(x + z\, e^t)\, dS(z).$$

Quelques points standard de la théorie des fonctions psh :

Proposition 1.2.2 *Soit* $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$. *Alors*

(i) *à t fixé, les fonctions $x \mapsto \Lambda(u, x, t)$ et $x \mapsto \lambda(u, x, t)$ sont continues et psh en x ;*

(ii) *à x fixé, les fonctions $t \mapsto \Lambda(u, x, t)$ et $t \mapsto \lambda(u, x, t)$ sont convexes et croissantes en t ;*

(iii) $u(x) \le \lambda(u, x, t) \le \Lambda(u, x, t)$.

Du fait que les fonctions psh sont localement intégrables, on est en droit d'appliquer la machinerie des opérateurs différentiels. Soit

$$\Delta = 4 \sum_k \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_k}$$

l'opérateur de Laplace, alors Δu est une mesure positive (qui est, à un facteur constant près, la *mesure de Riesz* of u considérée comme une fonction sous-harmonique dans $\mathbb{R}^{2n}$). On note

$$\sigma_u(x,r) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{B}_r(x)} \Delta u.$$

Proposition 1.2.3

$$\frac{\sigma_u(x,r)}{\tau_{n-1}r^{2n-2}} = \frac{\partial\lambda(u,x,\log r)}{\partial \log r}, \tag{1.2.1}$$

$\partial/\partial \log r$ étant entendue ici comme l'opérateur de dérivation à gauche.

Preuve. Elle repose sur la formule de Green. □

Définition 1.2.4 Du fait que $\lambda(u,x,t)$ est convexe et croissante, le membre de droite de (1.2.1) est une fonction croissante de r et il en est de même pour le membre de gauche, par conséquent la limite suivante existe

$$\nu(u,x) := \lim_{r\to 0}\frac{\sigma_u(x,r)}{\tau_{n-1}r^{2n-2}}, \tag{1.2.2}$$

et est le nombre de Lelong de u en x.

En d'autres temes, le nombre de Lelong de u en x est *la* $(2n-2)$-*dimensionnelle densité of la mesure de Riesz de u en x*. Quand $n = 1$, il s'agit précisément de la masse que la mesure de Riesz de u affecte au point x.

D'autres représentations élémentaires de $\nu(u,x)$ font intervenir le comportement asymptotique de u près de x – plus précisément, la pente des fonctions convexes $\lambda(u,x,t)$ et $\Lambda(u,x,t)$ en $-\infty$. À cette fin, nous avons besoin d'un simple fait (que l'on utilisera de manière rététée par la suite) :

Lemme 1.2.5 (le lemme de la pente) *Si $g(t)$ est une fonction convexe croissante sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors le taux de variation*

$$\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}, \quad t_0 \in I,$$

croît en fonction de t.

Preuve. Il s'agit d'un calcul direct. □

Théorème 1.2.6 *Pour toute fonction psh u,*

$$\nu(u,x) = \lim_{t\to-\infty} \frac{\lambda(u,x,t)}{t} = \lim_{t\to-\infty} \frac{\Lambda(u,x,t)}{t}. \tag{1.2.3}$$

Preuve. Elle repose sur (1.2.1), (1.2.2), le lemme de la pente, et l'inégalité de Harnack. □

Notons que $u(x) = -\infty$ n'implique pas $\nu(u,x) > 0$. Ceci a lieu si et seulement si le comportement de $u(z)$ au voisinage de x est controlé par $\log|z-x|$:

Corollaire 1.2.7

$$\nu(u,x) = \liminf_{z\to x} \frac{u(z)}{\log|z-x|} = \sup\{\nu > 0 : u(z) \le \nu \log|z-x| + O(1),\ z \to x\}.$$

De plus, pour tout sous-domaine $\Omega' \subset\subset \Omega$ contenant x, il existe une constante C telle que

$$u(z) \le \nu(u,x)\log|z-x| + C, \quad z \in \Omega'. \tag{1.2.4}$$

Preuve. La première ligne est juste une reformulation de (1.2.3). Pour prouver la seconde assertion, prenons $x = 0$. Une fois effectué le changement d'échelle $z \mapsto tz$, $t > 0$, on peut supposer que $\mathbb{B}_1 \subset \Omega'$. Maintenant on choisit la constante $C > 0$ de manière à ce que $u(z) \le C$ sur $\partial\Omega'$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage ω de x dans lequel $u \le u' := (\nu(u,0) - \epsilon)\log|z|$; ceci est en particulier vrai sur $\partial\omega$. On a donc $u - C \le u'$ sur $\partial\Omega'$, où $\Omega'' := \Omega' \setminus \overline{\omega}$. Du fait que la fonction u' est une fonction psh maximale [1] dans l'ouvert Ω'', on en déduit $u \le u'$ dans Ω'' et donc dans Ω' tout entier. □

Les deux représentations dans le Théorème 1.2.6 impliquent de jolies propriétés du nombre de Lelong vu comme fonctionnelle sur les singularités psh. On note PSH_x la famille de tous les germes de fonctions psh au point x.

Corollaire 1.2.8 *Soit $\{u_k\}$ une collection finie de germes en x de fonctions psh ($u_k \in \mathrm{PSH}_x$). Alors*

$$\nu\left(\sum_k u_k, x\right) = \sum_k \nu(u_k, x)$$

1. On rappelle que $u \in \mathrm{PSH}(D)$ est dite *maximale* sur D si pour tout $D' \subset\subset D$, la condition $v \le u$ sur $D \setminus D'$ pour $v \in \mathrm{PSH}(D)$ implique $v \le u$ sur D tout entier.

et

$$\nu\left(\max_k u_k, x\right) = \min_k \nu(u_k, x).$$

Plus difficiles à obtenir sont la semicontinuité supérieure de la fonction $x \mapsto \nu(u, x)$ et son invariance relativement au choix du système de coordonnées ; on prouvera plus loin ces résultats comme conséquence d'assertions plus générales impliquant les *nombres de Lelong généralisés relativement à des poids psh*.

Encore plus difficile à atteindre est le célèbre théorème d'analyticité de Siu.

Définition 1.2.9 Pour $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$, on note

$$E_c(u) = \{x \in \Omega : \nu(u, x) \geq c\}, \quad c > 0,$$

les *ensembles de niveaux supérieurs* pour les nombres de Lelong.

Théorème 1.2.10 (Siu) *$E_c(T)$ est une sous-variété analytique dans Ω.*

On repousse la preuve de ce résultat jusqu'au moment où nous y serons prêts.

1.3 Exemples

Les assertions suivantes se déduisent du Théorème 1.2.6.

a) Si $u(z) = \log|z|$, alors $\nu(u, 0) = 1$.

b) Soit $u(z) = \log|f(z)|$, où $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe avec $f(x) = 0$. Alors $\nu(u, x) = m$, la *multiplicité (ordre d'annulation) de f en x* (le degré minimal des monômes figurant dans le développement de Taylor de f au voisinage de x).

c) Si $f = (f_1, \ldots, f_m) : \Omega \to \mathbb{C}^N$ est une application holomorphe avec $f(x) = 0$, et $u(z) = \log|f(z)| = \frac{1}{2}\log\sum_k |f_k(z)|^2$, alors

$$\nu(u, x) = \min_k m_k,$$

où les m_k sont les ordres d'annulation (multiplicités) en x des composantes f_k de l'application holomorphe f.

1.4 Nombres de Lelong de tranches et pull-backs

Fixons $x \in \Omega$. Étant donné $y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, soit L la droite complexe $\zeta \mapsto x + \zeta y$ et soit u_y la restriction de u à $\Omega_L = \Omega \cap L$ (la *tranche de* u *sur* L) :

$$u_y(\zeta) := u(x + \zeta y) \in SH(\Omega_L). \tag{1.4.5}$$

Théorème 1.4.1 *$\nu(u_y, 0) \geq \nu(u, x)$ pour tout $y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, et d'autre part $\nu(u_y, 0) = \nu(u, x)$ pour tout y hors d'un sous-ensemble pluripolaire A de $\mathbb{C}^n$.*

Preuve. La première assertion est évidente au vu de (1.2.3). Pour prouver la seconde, on suppose $u(x) = -\infty$ et on considère la famille de fonctions

$$u_\zeta(y) = -\frac{u(x + \zeta y)}{\log |\zeta|},$$

psh en y et négatives sur une boule $\mathbb{B}_r$ pourvu que $0 < |\zeta| < \delta_r < 1$. Alors, la régularisée semicontinue supérieure $v^*(y)$ de la fonction

$$v(y) = \limsup_{\zeta \to 0} u_\zeta(y)$$

est une fonction psh négative sur $\mathbb{C}^n$ et donc $v^*(y) \equiv C$ pour une certaine constante C. Pour calculer cette constante, on commence à observer que $v(y) = -\nu(v_y, 0) \leq -\nu(u, x)$ pour tout $y \neq 0$. De plus, comme

$$\nu(u, x) = \omega_n^{-1} \int_{\mathbb{S}_1} \nu(u_y, 0)\, dS(y), \tag{1.4.6}$$

on en déduit $C = -\nu(u, x)$. Finalement, comme on le sait, le sous-ensemble $\{y :\ v(y) < v^*(y)\}$ est pluripolaire[2] in $\mathbb{C}^n$. □

Soit maintenant f une fonction holomorphe $\Omega' \to \Omega$ avec $f(x') = x$; on note alors f^*u le *pull-back* d'une fonction $u \in PSH(\Omega)$, c'est-à-dire, $(f^*u)(z) = u(f(z))$.

Il est facile de voir que

$$\nu(f^*u, x') \geq \nu(u, x).$$

Une relation (non élémentaire) dans le sens inverse est donnée par le

2. Un sous-ensemble $E \subset \Omega$ est is *pluripolaire* s'il existe $v \in \mathrm{PSH}(\Omega)$, $v \not\equiv -\infty$, telle que $v|_E = -\infty$.

Théorème 1.4.2 [F99], [K00b] *If $f(U)$ est d'intérieur non vide pour tout voisinage U de x', alors il existe une constante positive C, indépendante de u, telle que $\nu(f^*u, x') \leq C\nu(u, x)$ pour toute fonction u plurisouharmonique au voisinage de x. Il ne saurait exister de telle majoration à partir du moment où $f(U)$ contient des points qui ne lui sont pas intérieurs, ce pour au moins un voisinage U de x'.*

1.5 Nombres de Lelong directionnels

On obtient plus d'informations sur le comportement d'une fonction psh au voisinage de son point singulier en comparant cette fonction psh avec des fonctions convexes dans $\mathbb{R}^n$ (plutôt que des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$).

Notation 1.5.1 Étant donnés $x \in \Omega$ et le vecteur $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, on considère les poly(disque)-caractéristiques

$$\lambda(u, x, a) := (2\pi)^{-n} \int_{[0,2\pi]^n} u(x_1 + e^{a_1 + i\theta_1}, ..., x_k + e^{a_k + i\theta_k})\, d\theta,$$

$$\Lambda(u, x, a) := \sup \{u(z) : z \in T_a(x)\},$$

où

$$T_a(x) = \{z : |z_k - x_k| = e^{a_k},\ 1 \leq k \leq n\}.$$

De manière similaire à $\lambda(u, x, t)$ et $\Lambda(u, x, t)$ lorsque $t \in \mathbb{R}$, ces fonctions sont convexes en a et croissantes en chaque a_k,

$$u(x) \leq \lambda(u, x, a) \leq \Lambda(u, x, a),$$

et l'on a $\lambda(u, x, a)$, $\Lambda(u, x, a) \to u(x)$ lorsque $a_k \to -\infty$, $1 \leq k \leq n$. Ce qui justifie la

Définition 1.5.2 [K87], [K94] Étant donné un vecteur positif $a \in \mathbb{R}^n_+$, on a existence des limites

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\lambda(u, x, ta)}{t} = \lim_{t\to-\infty} \frac{\Lambda(u, x, ta)}{t} =: \nu(u, x, a), \quad a \in \mathbb{R}^n_+, \tag{1.5.7}$$

et leur valeur commune $\nu(u, x, a)$ est appelée *nombre de Lelong directionnel*, ou encore *nombre de Kiselman*, de la fonction psh u au point x, ce dans la direction a.

Proposition 1.5.3 *Soit* $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ *; alors* $\nu(u, x) = \nu(u, x, \mathbf{1})$.

Preuve. $\Lambda(u, x, t) \leq \Lambda(u, x, t\mathbf{1}) \leq \Lambda(u, x, t + \frac{1}{2}\log n)$. $\square$

Exemple 1.5.4 Soit $u(z) = \log |f(z)|$, où f est une fonction holomorphe au voisinage de x avec $f(x) = 0$ et au voisinage de x,

$$f(z) = \sum_{J \in \omega_x} c_J (z - x)^J, \quad c_J \neq 0$$

(with $\omega_x \subset \mathbb{Z}_+^n$). Alors

$$\nu(u, x, a) = \inf \{\langle a, J\rangle : \ J \in \omega_x\}. \tag{1.5.8}$$

Notons en effet I le membre de droite de (1.5.8). Alors

$$\begin{aligned}\Lambda(u, x, ta) &= \sup_{\theta \in [0,2\pi]^n} \log \left| \sum_{J \in \omega_x} c_J \exp[\langle ta, J\rangle + i\langle \theta, J\rangle] \right| \\ &= t\,I + \sup_{\theta} \log \left| \sum_{J \in \omega_0} c_J \exp[\langle ta, J\rangle - I + i\langle \theta, J\rangle] \right|\end{aligned}$$

et par conséquent, $t^{-1}\Lambda(u, 0, ta) \to I$ as $t \to -\infty$.

1.6 Indicatrices locales

La notion d'indicatrice locale a été introduite dans [LeR99]. On se donne $u \in \mathrm{PSH}_x$. On considère ensuite les nombres de Lelong directionnels $\nu(u, x, a)$ de u en x comme fonctions de $a \in \mathbb{R}_+^n$, et l'on transforme enfin ces fonctions en des fonctions dans le polydisque $\mathbb{D}^n$:

Définition 1.6.1 La fonction

$$\psi_u(s) := -\nu(u, x, -s), \ s \in \mathbb{R}_-^n,$$

est une fonction négative ou nulle, convexe en s et croissante en chaque s_k, ainsi

$$\Psi_{u,x}(z) := \psi_u(\log |z_1|, \dots, \log |z_n|)$$

est psh dans $\mathbb{D}_*^n := \{z : 0 < |z_k| < 1, \ 1 \leq k \leq n\}$ et se prolonge donc de manière unique en une function psh dans le polydisque unité $\mathbb{D}^n$, que l'on appelle *indicatrice locale* de u en x.

Quand $x = 0$, on note cette indicatrice locale simplement Ψ_u.

On vérifie aisément que la fonction ψ_u est positive homogène, c'est-à-dire que

$$\psi_u(c\,s) = c\,\psi_u(s) \quad \forall c > 0,\ s \in \mathbb{R}^n_-. \tag{1.6.9}$$

Proposition 1.6.2 *L'indicatrice locale Ψ_u est une fonction psh maximale dans $\mathbb{D}^n_*$.*

Preuve. Soit $y \in \mathbb{D}^n_*$ de coordonnées $r_k e^{i\theta_k} \neq 0$. On considère la courbe holomorphe $\lambda : \omega \to \Gamma_y \subset \mathbb{C}^n$ sur un petit voisinage ω de $1 \in \mathbb{C}$, avec $\lambda_k(\zeta) = r_k^\zeta e^{i\theta_k}$. La fonction $\lambda^*\Psi_u \in SH(\omega)$ est seulement fonction de $\mathrm{Re}\,\zeta$ et satisfait $\lambda^*\Psi_u(c\,\zeta) = c\,\lambda^*\Psi_u(\zeta)$ pour tout $c > 0$. Elle est donc linéaire et par conséquent harmonique dans ω. Ceci implique, du fait que $\lambda(1) = y$, la maximalité de Ψ_u dans $\mathbb{D}^n_*$. □

On observe que $\Psi_{\Psi_u} = \Psi_u$, ce qui sigifie que Ψ_u a mêmes nombres de Lelong directionnels en 0 que la fonction u.

La borne suivante constitue un raffinement de $u(z) \leq \nu(u,0)\log|z| + C$.

Théorème 1.6.3 *Pour toute fonction $u \in \mathrm{PSH}_0$,*

$$u \leq \Psi_u + C \tag{1.6.10}$$

au voisinage de l'origine. Plus généralement toute fonction $u \in \mathrm{PSH}_x$ satisfait

$$u(z) \leq \Psi_{u,x}(z - x) + C$$

au voisinage de x.

Preuve. Il résulte du lemme de la pente que pour tout $s \in \mathbb{R}^n_-$ et $t < t_0 < 0$, on a

$$\frac{\Lambda(u,0,-ts) - \Lambda(u,0,-t_0 s)}{t - t_0} \geq -\psi_u(s),$$

ce qui implique (1.6.10). □

Exemples 1.6.4

1. Pour $u(z) = \log|z|$, $\Psi_u(z) = \sup_k \log|z_k|$.
2. Les fonctions
$$\varphi_a(z) := \max_k a_k^{-1}\log|z_k|, \quad a_k > 0, \tag{1.6.11}$$
sont leurs propres indicatrices locales dans $\mathbb{D}^n$.

3. Soit $u = \log|f|$ avec f holomorphe de Ω (voisinage de 0) dans $\mathbb{C}^N$; on considère l'ensemble
$$\omega_0 = \{J \in \mathbb{Z}_+^n : \sum_j \left|\frac{\partial^J f_j}{\partial z^J}(0)\right| \neq 0\}; \tag{1.6.12}$$
il résulte de (1.5.8) que $\Psi_u(z) = \sup\{\log|z^J| : J \in \omega_0\}$.

2 Nombres de Lelong pour des courants positifs fermés

Nous avons jusqu'à ce point développé une approche aux nombres de Lelong reposant sur les propriétés asymptotiques des fonctions psh. On peut exploiter une information plus riche en considérant ces mêmes objets comme des densités de mesures de Riesz. Pour ce faire, il convient que ces mesures soient pensées comme des mesures trace attachées aux courants positifs fermés de bidegré $(1,1)$ correspondant aux fonctions psh en jeu. Pareille approche s'étend aussi au cadre de courants de (bi)-degrés supérieurs. Une des motivations pour une telle extension est la suivante. Quand $u = \log|f|$ avec $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe, le nombre de Lelong en un point $x \in \Omega$ est juste l'ordre (ou multiplicité) d'annulation de f en x, tandis que les multiplicités de applications holomorphes $(f_1, ..., f_N) : \Omega \to \mathbb{C}^N$ sont caractérisées, elles, en termes de nombres de Lelong attachés à des courants positifs fermés de bidegré $(n-p, n-p)$ avec $n-p > 1$.

Passons donc maintenant aux nombres de Lelong pour les courants positifs fermés, après avoir au préalable rappelé quelques notions de base de la théorie des courants. Les sujets développés dans les sous-sections 2.1 – 2.4 sont traités par exemple dans [BłLN1], [GuZe17], [H94], [Kl91], [Le69], [LeGr86], [Ko98]. Les sous-sections 2.5 – 2.8 sont essentiellement empruntées à [D93] (elles constituent le chapitre III de [Dbook]). Plus de résultats concernant les nombres de Lelong de courants seront présentés ultérieurement.

2.1 Courants positifs fermés

Voici quelques notations et éléments de base concernant les courants positifs fermés.

Notation 2.1.1 Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ et $0 \leq p, q \leq n$.
$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions C^∞ à valeurs complexes et de support compact inclus dans Ω.
$\mathcal{D}_{p,q}(\Omega)$ est l'espace des formes différentielles ϕ à valeurs complexes, C^∞ et à support compact inclus dans Ω, de bidegré (p, q) :

$$\phi = \sum_{|I|=p,|J|=q} \phi_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J, \quad \phi_{IJ} \in \mathcal{D}(\Omega),$$

équipé de la topologie de la convergence C^∞.

L'opérateur $\partial : \mathcal{D}_{p,q}(\Omega) \to \mathcal{D}_{p+1,q}(\Omega)$ agit ainsi :

$$\partial\phi = \sum_{I,J} \sum_{1\leq k\leq n} \frac{\partial \phi_{IJ}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

tandis que l'opérateur $\bar{\partial} : \mathcal{D}_{p,q}(\Omega) \to \mathcal{D}_{p,q+1}(\Omega)$ agit, lui, de cette manière :

$$\bar{\partial}\phi = \sum_{I,J} \sum_{1\leq k\leq n} \frac{\partial \phi_{IJ}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

Les opérateurs

$$d = \partial + \bar{\partial}, \quad d^c = \frac{\partial - \bar{\partial}}{2\pi i}$$

sont réels et $dd^c = \frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}$. Notons qu'il n'y a pas de convention générale concernant la normalisation de l'opérateur d^c ; certains auteurs utilisent la convention de normalisation $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$; nous préférons celle adoptée ici aux fins d'éviter des facteurs $(2\pi)^p$ dans ce qui suit.

Il résulte du théorème de Stokes que

$$\int_D d\phi = -\int_{\partial D} \phi$$

pour tout domaine $D \subset \Omega$ et toute forme ϕ telle que $d\phi \in \mathcal{D}_{n,n}(\Omega)$.

Définition 2.1.2 Les *courants de bidimension* (p, q) (ou aussi *de bidegré* $(n - p, n - q)$) sont les éléments de l'espace dual $\mathcal{D}'_{p,q}(\Omega)$, c'est-à-dire les formes linéaires continues sur $\mathcal{D}_{p,q}(\Omega)$.

Tout courant $T \in \mathcal{D}'_{p,q}(\Omega)$ se représente sous la forme

$$T = \sum_{|I|=n-p,|J|=n-q} T_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J, \quad T_{IJ} \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

L'action de T sur ϕ sera notée $\langle T, \phi \rangle$ or $\int T \wedge \phi$.

Le choix de la topologie sur $\mathcal{D}'_{p,q}(\Omega)$ (*topologie faible au sens des courants*) respecte le principe de convergence des suites

$$T_j \to T \iff \langle T_j, \phi \rangle \to \langle T, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_{p,q}(\Omega).$$

Les courants se différentient ainsi :

$$\langle \partial T, \phi \rangle := (-1)^{p+q+1} \langle T, \partial \phi \rangle, \quad \langle \bar{\partial} T, \phi \rangle := (-1)^{p+q+1} \langle T, \bar{\partial} \phi \rangle.$$

Définition 2.1.3 Un courant $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(\Omega)$ est dit *positif* ($T \geq 0$) si l'on a $\langle T, \phi \rangle \geq 0$ pour toute forme différentielle $\phi = i\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \ldots \wedge i\alpha_p \wedge \bar{\alpha}_p$ avec $\alpha_k \in \mathcal{D}_{1,0}(\Omega)$.

Les coefficients d'un tel courant sont des mesures sur Ω. Ainsi l'action d'un tel courant positif $T = \sum T_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J$ s'étend continûment à l'espace des formes différentielles ϕ à support compact ayant seulement comme coefficients des fonctions *continues*,

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq \|T\|_{\operatorname{supp} \phi} \|\phi\|,$$

où $\|T\|_E = \sum |T_{JK}|_E$, $|T_{JK}|_E$ dénote, si $E \subset \Omega$, la variation totale de la mesure T_{JK} sur E et $\|\phi\| = \sup_{K,L,x} |\phi_{KL}(x)|$.

Notation 2.1.4

$$\beta := \frac{i}{2} \sum_{1 \leq k \leq n} dz_k \wedge d\bar{z}_k = \frac{\pi}{2} dd^c |z|^2$$

est la *forme de Kähler standard* sur $\mathbb{C}^n$ et

$$\beta_p := \frac{1}{p!} \beta^p$$

est l'*élément de volume* p-dimensionnel.

Pour tout courant positif $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(\Omega)$ et tout borélien $E \subset \Omega$, on a

$$\|T\|_E \leq c_n |T \wedge \beta_p|_E.$$

Définition 2.1.5 Un courant T est dit *fermé* si $dT = 0$. Quand T est dans $\mathcal{D}'_{p,p}(\Omega)$, ceci équivaut à dire que $\partial T = 0$ ou que $\bar{\partial} T = 0$.

Une variante utile du théorème de Stokes se formule ainsi : *si T est dans $\mathcal{D}'_{p,p}(\Omega)$, alors*

$$\int_D d\phi \wedge T = -\int_{\partial D} \phi \wedge T$$

pour tout domaine $D \subset\subset \Omega$ et toute forme ϕ telle que $d\phi \in \mathcal{D}_{p,p}(\Omega)$.

Notation 2.1.6 $\mathcal{D}^+_p(\Omega)$ dénotera le cône des *courants positifs fermés* appartenant à $\mathcal{D}'_{p,p}(\Omega)$.

Un outil important de la théorie des courants est le théorème d'extension du à Skoda et El Mir.

Définition 2.1.7 Soit E un sous-ensemble fermé, complètement pluripolaire de Ω (ce qui signifie que $E = \{z \in \Omega : \ u(z) = -\infty\}$ pour une fonction $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$) et soit $T \in \mathcal{D}^+_p(\Omega \setminus E)$ un courant positif fermé dont les coefficients mesures T_{IJ} ont une masse locale finie au voisinage de E. Alors le courant $\tilde{T} = \sum \tilde{T}_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J$ avec $\tilde{T}_{IJ}(A) := T_{IJ}(A \setminus E)$ pour tout borélien $A \subset \Omega$ est dit *simple* ou *triviale extension* of T.

La notion d'extension simple ou triviale $\tilde{T}$ d'un courant positif fermé T a été introduite pour la première fois par Lelong lors de l'étude de l'intégration sur les sous-variétés analytiques, voir l'exemple 3 dans la sous-section suivante.

Théorème 2.1.8 [SK82], [EM] *Sous les conditions ci-dessus $\tilde{T} \in \mathcal{D}^+_p(\Omega)$.*

Il arrive que $\tilde{T}$ soit l'unique extension de $T \in \mathcal{D}^+_p(\Omega \setminus E)$: c'est le cas par exemple si E est un sous-ensemble analytique de dimension strictement inférieure à p (ceci est un cas particulier d'un résultat plus général de la théorie des courants).

2.2 Exemples de courants

On trouvera ci-dessous une liste d'exemples standard.

1. *Les courants induits ainsi par les fonctions psh* :

$$u \in PSH(\Omega) \iff \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right) \geq 0 \iff dd^c u \in \mathcal{D}^+_{n-1}(\Omega).$$

   De plus, si $T \in \mathcal{D}^+_{n-1}(\Omega)$, alors tout $x \in \Omega$ admet un voisinage U dans lequel vit une fonction $u_U \in PSH(U)$ telle que $T = dd^c u_U$ dans U.

2. Si M est une *variété analytique complexe (lisse)* de dimension p (ici plongée dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$), le courant $[M]$ (d'intégration sur M) est défini par

$$\langle [M], \phi \rangle = \int_M \phi.$$

   On a $[M] \in \mathcal{D}^+_p(\Omega)$ (le fait que $[M]$ soit fermé résulte du théorème de Stokes).

3. Les courants d'intégration sur les *sous-ensembles analytiques fermés* : si A est un sous-ensemble analytique fermé de $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ de dimension pure égale à p, c'est-à-dire un sous-ensemble défini localement par $A = \{z \in \Omega : f_\alpha(z) = 0,\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ et que $Reg\, A$ désigne le sous-ensemble ouvert (dans A) des points réguliers de A (au voisinage desquels A est localement une variété analytique complexe lisse de dimension complexe p), on définit le courant $[A]$ (d'intégration sur A) par

$$\langle [A], \phi \rangle := \int_{Reg\, A} \phi.$$

   Alors $[A] \in \mathcal{D}^+_p(\Omega)$ (le point non trivial est le fait que $[A]$ soit fermé ; ce résultat fondamental est du à P. Lelong [Le57] ; de nos jours, on peut le voir comme une conséquence du Théorème 2.1.8).

4. Les p-chaînes holomorphes $T = \sum \alpha_k [A_k] \in \mathcal{D}^+_p(\Omega)$, où les $\alpha_k \in \mathbb{Z}_+$ et les A_k sont des sous-ensembles analytiques fermés de dimension pure p de Ω. Lorsque $p = n-1$, les chaînes holomorphes représentent les diviseurs positifs ou, dans le langage de la géométrie algébrique, effectifs.

2.3 Courants de Monge-Ampère

Voici ici un bref panorama des questions relatives à l'*opérateur de Monge-Ampère*

$$(dd^c u)^n := \underbrace{dd^c u \wedge \ldots \wedge dd^c u}_{n}$$

agissant sur les fonctions psh u ou, plus généralement, aux courants réalisés comme

$$dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_p \tag{2.3.1}$$

lorsque $u_1, \ldots, u_p$, $p \leq n$, sont des fonctions psh. Le produit extérieur ne peut certes être étendu du cadre où les fonctions u_k sont C^∞ au cadre où ce sont des fonctions psh quelconques. Toutefois, $(dd^c u)^p$ peut être défini de manière inductive comme un courant positif fermé suivant la règle opératoire

$$(dd^c u)^p = dd^c[u(dd^c u)^{p-1}], \quad p = 2, \ldots, n,$$

lorsque u est une fonction psh localement bornée (Bedford–Taylor). Plus généralement, pour tout courant $T \in \mathcal{D}_p^+(\Omega)$ et toute fonction u appartenant à $PSH(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$, le courant uT est bien défini, est localement de masse finie, et tel que

$$dd^c u \wedge T := dd^c(uT) \in \mathcal{D}_{p-1}^+.$$

Lorsque u est C^∞, il s'agit d'un résultat classique ; le cas général s'obtient, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, en régularisant u par des fonctions lisses u_ϵ.

L'opérateur de Monge-Ampère fournit une caractérisation des fonctions psh maximales :

Théorème 2.3.1 *Une fonction psh localement bornée u est maximale dans un domaine $\omega \subset \mathbb{C}^n$ si et seulement si $(dd^c u)^n = 0$ dans ω.*

Le lemme technique suivant, simple mais important, fera l'objet d'un usage répété ultérieurement.

Lemme 2.3.2 *(principe de localisation à la frontière) Soient $\Omega' \subset\subset \Omega$, $T \in \mathcal{D}_1^+(\Omega)$, et $u, v \in \mathrm{PSH}(\Omega') \cap L^\infty(\Omega')$ avec $u = v$ au voisinage de $\partial\Omega'$. Alors*

$$\int_{\Omega'} dd^c u \wedge T = \int_{\Omega'} dd^c v \wedge T.$$

Les obstructions à la possibilité de définir le courant de Monge-Ampère (2.3.1) proviennent des ensembles singuliers des fonctions u_k en jeu dans la construction. Pour que cette construction soit licite, il convient soit que ces ensembles singuliers soient « petits », soit que les fonctions u_k ne décroissent pas trop rapidement vers $-\infty$ au voisinage de leurs singularités. Si l'on a dans l'esprit l'exploitation de ces résultats dans le cadre des applications holomorphes $f\ :\Omega\to\mathbb{C}^N$, il est nécessaire d'imposer des restrictions aux ensembles singuliers eux-mêmes du fait que dans pareil cas la décroissance de $\log|f|$ au voisinage des singularités est inévitablement la plus forte possible.

Définition 2.3.3 La *l-mesure de Hausdorff* $\mathcal{H}_l$ est définie par

$$\mathcal{H}_l(E) = \lim_{\epsilon\to 0}\inf\sum_j r_j^l,$$

où le minimum est pris sur tous les recouvrements de E par des boules de rayon $r_j<\epsilon$.

Théorème 2.3.4

(i) *Soit $T\in\mathcal{D}_p^+(\Omega)$, $u_1,\ldots,u_q\in\mathrm{PSH}(\Omega)$, $q\le p\le n$, tels que les sous-ensembles $L_j := u_j^{-1}(\{-\infty\})$ sont soient compacts dans Ω, soient tels que*

$$\mathcal{H}_{2(p-m+1)}(L_{j_1}\cap\ldots\cap L_{j_m}\cap\operatorname{supp}T)=0 \qquad (2.3.2)$$

pour tout choix d'indices $j_1<\ldots<j_m$, $m=1,\ldots,q$, où $\mathcal{H}_{2(p-m+1)}$ désigne la mesure de Hausdorff $2(p-m+1)$-dimensionnelle. Alors les courants

$$u_1dd^cu_2\wedge\ldots\wedge dd^cu_q$$

et

$$dd^cu_1\wedge dd^cu_2\wedge\ldots\wedge dd^cu_q\wedge T := dd^c(u_1dd^cu_2\wedge\ldots\wedge dd^cu_q\wedge T)$$

sont bien définis et de masse locale finie. En particulier $(dd^cu)^n$ est bien défini lorsque $u\in\mathrm{PSH}(\Omega)\cap L^\infty_{loc}(\Omega\setminus K)$ si $K\subset\subset\Omega$.

(ii) *Les opérateurs de Monge-Ampère sont continus sous la prise de limite monotone (en termes de convergence au sens de la capacité).*

Lorsque les fonctions u_j sont de la forme $u_j = \log|f_j|$ avec f_j holomorphe de Ω dans $\mathbb{C}$, la condition (2.3.2) dans le cas où $T = 1$ signifie

$$\dim(Z_{j_1} \cap \ldots \cap Z_{j_m}) \leq n - m, \quad m = 1, 2, \ldots, q. \tag{2.3.3}$$

Si $u = \log \sum_{1 \leq j \leq N} |f_j|^2 =: \log |f|^2$, l'opérateur $(dd^c u)^q$ est bien défini si

$$\dim Z_f \leq n - q, \tag{2.3.4}$$

où $Z_f = Z_1 \cap \ldots \cap Z_N$ désigne le lieu des zéros de $f = (f_1, \ldots, f_N)$.

2.4 Nombres de Lelong pour des courants positifs fermés

Définition 2.4.1 Si $T \in \mathcal{D}_p^+(\Omega)$, $\sigma_T := T \wedge \beta_p \in \mathcal{D}_0^+$ est la *mesure trace* de T (si $T = dd^c u$, alors σ_T est juste la *mesure de Riesz* σ_u de u).

On note $\sigma_T(x, r) = \sigma_T(\mathbb{B}_r(x))$. On dispose aussi de la représentation suivante.

Proposition 2.4.2

$$\sigma_T(x, r) = \tau_p \, r^{2p} \int_{\mathbb{B}_r(x)} T \wedge (dd^c \log|z - x|)^p \, .$$

Remarque. Suivant le Théorème 2.3.4, le courant $T \wedge (dd^c \log|z - x|)^p$ est bien défini.

Preuve. On utilise le principe de localisation à la frontière avec $u(z) = |z - x|^2$ et $v(z) = \chi_\epsilon(\log|z - x|)$, où $\chi_\epsilon(t)$ vaut e^{2t} for $t > \log r - \epsilon$ et est affine ailleurs tout en étant tangente à e^{2t} en $t = \log r - \epsilon$. $\square$

Définition 2.4.3 Le *nombre de Lelong du courant* $T \in \mathcal{D}_p^+(\Omega)$ en $x \in \Omega$ *est*

$$\nu(T, x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\tau_p r^{2p}} \int_{B_r(x)} T \wedge \beta_p = \lim_{r \to 0} \int_{B_r(x)} T \wedge (dd^c \log|z - x|)^p \, . \tag{2.4.5}$$

Ainsi le nombre de Lelong d'un courant $T \in \mathcal{D}_p^+(\Omega)$ peut être vu à la fois comme la densité $2p-$dimensionnelle de la mesure trace σ_T de ce courant ou comme la masse qu'affecte au point x la mesure trace « projective » définie comme $T \wedge (dd^c \log|\cdot - x|)^p$.

Corollaire 2.4.4 $\sigma_T(x, r) \geq \tau_p r^{2p} \nu(T, x)$.

Exemples 2.4.5 Les nombres de Lelong pour les exemples-modèles de courants proposés sont les suivants.

1. Si $T = dd^c u$ pour une fonction psh u, then $\nu(T, x) = \nu(u, x)$. Ceci résulte de la définition originelle (1.2.2) du nombre de Lelong en un point d'une fonction psh puisque $\sigma_u = \sigma_T$ (aux fins de cohérence, on devrait écrire $\nu(dd^c u, x)$ au lieu de $\nu(u, x)$, toutefois on préfère ici conserver la notation originelle des nombres de Lelong car elle est standard).
2. Pour toute sous-variété analytique complexe (lisse) M de Ω, on a $\nu([M], x) = 1$ en tout $x \in M$ (et bien sûr $\nu([M], x) = 0$ pour tout $x \notin M$). Ceci résultera de l'indépendance du nombre de Lelong relativement au choix du système de coordonnées (assertion qui sera prouvée ultérieurement).
3. Beaucoup plus difficile est le résultat correspondant pour des sous-ensembles analytiques fermés de dimension pure A (le théorème de Thie), qui assure que le nombre de Lelong $\nu([A], x)$ est égal à la multiplicité m_x du sous-ensemble analytique A au point x ; nous prouverons cela plus loin aussi.

   On observe que le volume $2p$-dimensionnel d'un sous-ensemble analytique fermé A dans un borélien D vaut précisément $\sigma_{[A]}(D)$, ce qui fournit l'*estimation de volume* suivante : *si* $K \subset\subset A$ *et que l'on a* $r_0 < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$, *alors*

$$\tau_p r^{2p} m_x \leq \mathrm{Vol}_{2p}(A \cap B_r(x)) \leq C(r_0, K, A)\, r^{2p} \quad \forall r < r_0,\ \forall x \in K.$$

4. Par linéarité, le nombre de Lelong en un point x d'une p-chaîne holomorphe $T = \sum_k \alpha_k [A_k]$ vaut

$$\nu(T, x) = \sum_k \alpha_k \nu([A_k], x) = \sum_k \alpha_k\, m_{x,k}.$$

Les propriétés fondamentales des nombres de Lelong pour les courants positifs fermés seront établies en utilisant la machinerie des nombres de Lelong généralisés introduite due à Demailly.

2.5 Définition des nombres de Lelong généralisés

Une notion importante de *nombres de Lelong généralisés relativement à des fonctions-poids psh* a été introduite et étudiée par Demailly. L'idée consiste à considérer au lieu de la mesure trace projective $T \wedge (dd^c \log|\cdot -x|)^p$ des mesures $T\wedge(dd^c\varphi)^p$ avec des fonctions psh φ assez générales (dites « fonctions-poids »psh) singulières au point x. Les nombres de Lelong au sens classique, comme les nombres de Lelong directionnels, en sont alors des cas particuliers, avec des choix spécifiques de fonctions-poids psh φ. De plus, la machinerie des nombres de Lelong généralisés fournit une manière à la fois simple et naturelle de prouver des résultats profonds concernant les nombres de Lelong standard.

Notation 2.5.1 Si $\varphi \in PSH(\Omega)$ et $r \in \mathbb{R}$, on note

$$B_r^\varphi = \{z : \varphi(z) < r\}, \quad S_r^\varphi = \{z : \varphi(z) = r\}.$$

Définition 2.5.2 Une fonction psh φ dans Ω est dite *semi-exhaustive* si $B_R^\varphi \subset\subset \Omega$ pour au moins un $R \in \mathbb{R}$. En particulier, $\varphi \in L^\infty_{loc}(\Omega \setminus B_R^\varphi)$ et par conséquent $(dd^c\varphi)^k$ est bien défini pour tout $k \leq n$. Si de plus e^φ est continue, on dit que φ est une *fonction-poids psh.*

Définition 2.5.3 Si $T \in \mathcal{D}_p^+(\Omega)$, on pose

$$\nu(T,\varphi,r) = \int_{B_r^\varphi} T \wedge (dd^c\varphi)^p$$

et on appelle

$$\nu(T,\varphi) = \lim_{r\to-\infty} \nu(T,\varphi,r),$$

le *nombre de Lelong généralisé*, ou encore *le nombre de Lelong-Demailly*, relativement au poids φ.

Si $T = dd^c u$ pour une fonction psh u, on notera parfois, comme pour les nombres de Lelong classiques, $\nu(u,\varphi)$ au lieu de $\nu(dd^c u,\varphi)$.

Exemples 2.5.4

1. Si $\varphi(z) = \log|z-x|$, alors $B_r^\varphi = \mathbb{B}_{e^r}(x)$, $\nu(T,\varphi,r) = \nu(T,x,e^r)$ et $\nu(T,\varphi) = \nu(T,x)$.
2. Le poids « directionnel »

$$\varphi_{a,x}(z) := \max_k a_k^{-1} \log|z_k - x_k|, \quad a_k > 0, \tag{2.5.6}$$

induit le nombre de Lelong directionnel dans la direction $(a_1,\ldots,a_n)$ (on le verra dans la sous-section 2.6).

L'utile formule suivante s'obtient comme conséquence du théorème de Stokes (comme c'était le cas pour les nombres de Lelong standard).

Proposition 2.5.5 *Pour toute fonction convexe croissante $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$\nu(T, \gamma \circ \varphi, \gamma(r)) = \gamma'(r)^p \, \nu(T, \varphi, r),$$

γ' étant ici entendue comme la dérivée à gauche. En particulier

$$\nu(T, \varphi, r) = e^{-2pr} \int_{B_r^\varphi} T \wedge \left(\frac{1}{2} dd^c e^{2\varphi} \right)^p.$$

2.6 La formule de Lelong–Jensen

Le nombre de Lelong classique d'une fonction psh en un point est à la fois la densité de sa mesure associée et une caractéristique asymptotique de la fonction elle-même. Une telle double interprétation subsiste pour les nombres de Lelong généralisés.

Définition 2.6.1 Soit φ un poids psh dans Ω, $\varphi_r = \max\{\varphi, r\}$. La *mesure de Monge-Ampère balayée* est

$$\mu_r^\varphi = (dd^c \varphi_r)^n - \mathbf{1}_r (dd^c \varphi)^n,$$

où $\mathbf{1}_r$ désigne la fonction caractéristique de $\Omega \setminus B_r^\varphi$.

Proposition 2.6.2

(i) $\mu_r^\varphi \geq 0$ *;*

(ii) $\operatorname{supp} \mu_r^\varphi \subset S_r^\varphi$ *et* $\mu_r^\varphi(\Omega) = \mu_r^\varphi(S_r^\varphi) = (dd^c\varphi)^n(B_r^\varphi)$ *;*

(iii) si $(dd^c\varphi)^n = 0$ *sur* $\Omega \setminus \varphi^{-1}(-\infty)$*, alors* $\mu_r^\varphi = (dd^c\varphi_r)^n$*.*

Exemple 2.6.3 Si $\varphi = \log|z - x|$, alors μ_r^φ est la mesure de Lebesgue normalisée sur $S_{e^r}(x)$.

Théorème 2.6.4 (formule de Lelong–Jensen–Demailly) *Si $u \in PSH(\Omega)$, u est μ_r-intégrable et l'on a*

$$\mu_r^\varphi(u) - \int_{B_r^\varphi} u (dd^c\varphi)^n = \int_{-\infty}^r \nu(u, \varphi, t) \, dt.$$

Preuve. C'est une conséquence des théorèmes de Fubini et de Stokes. $\square$

Comme conséquence, on a le

Théorème 2.6.5 *Si $(dd^c\varphi)^n = 0$ sur $\Omega \setminus \varphi^{-1}(-\infty)$, alors $\mu_r^\varphi(u)$ est une fonction convexe croissante de r et*

$$\nu(u, \varphi) = \lim_{r \to -\infty} \frac{\mu_r^\varphi(u)}{r}.$$

Preuve. Pour tout $r < r_0$,

$$\mu_r^\varphi(u) = \mu_{r_0}^\varphi(u) - \int_r^{r_0} \nu(u, \varphi, t)\, dt.$$

Du fait que $t \mapsto \nu(u, \varphi, t)\, dt$ est positive croissante, $r \mapsto \mu_r^\varphi(u)$ est croissante et convexe. En résulte l'existence de la limite

$$\lim_{r \to -\infty} \frac{\mu_r^\varphi(u)}{r} = \lim_{r \to -\infty} \frac{\mu_r^\varphi(u) - \mu_{r_0}^\varphi(u)}{r - r_0} = \lim_{t \to -\infty} \nu(u, \varphi, t) = \nu(u, \varphi).$$

$\square$

Exemples 2.6.6

1. Quand $\varphi(z) = \log|z - x|$, on retrouve la représentation du nombre de Lelong au sens classique $\nu(u, x) = \lim_{t \to -\infty} \lambda(u, x, t)/t$.
2. Pour un poids directionnel

$$\varphi(z) = \varphi_{a,0}(z) = \max_k a_k^{-1} \log|z_k|, \quad a_k > 0,$$

B_r^φ est le polydisque $\{|z_k| < e^{ra_k}\}$, la mesure $\mu_r^\varphi(u)$ est supportée par sa frontière distinguée et est invariante par rotation en chaque variable. Par conséquent $\mu_r^\varphi(u) = c_a \lambda(u, x, ra)$. On calculera plus tard $c_a = (a_1 \dots a_n)^{-1}$, ce qui donnera

$$\nu(u, \varphi_{a,0}) = (a_1 \dots a_n)^{-1} \nu(u, 0, a).$$

2.7 Semicontinuité

Les deux résultats « qualitatifs » suivants sont utiles lorsque l'on analyse une famille de courants relativement à un poids psh ou un courant relativement à une famille de poids psh.

Le premier affirme que les nombres de Lelong généralisés sont continus en fonction des courants en jeu.

Théorème 2.7.1 *Si une suite de courants $T_k \in \mathcal{D}_p^+(\Omega)$ converge vers un courant T, alors*

$$\limsup_{k\to\infty} \nu(T_k, \varphi) \leq \nu(T, \varphi).$$

Preuve. Cela résulte du principe de localisation à la frontière. □

Le second résultat traduit la semi-continuité des nombres de Lelong généralisés en fonction cette fois des fonctions-poids psh en jeu. Cette fois cependant il est nécessaire d'imposer une contrainte supplémentaire sur la convergence de la suite de fonctions-poids psh.

Théorème 2.7.2 *Si l'on a une une suite de fonctions-poids psh φ_k et une fonction-poids psh φ telles que $\exp\{\varphi_k\} \to \exp\{\varphi\}$ uniformément sur tout compact de Ω, alors*

$$\limsup_{k\to\infty} \nu(T, \varphi_k) \leq \nu(T, \varphi).$$

Preuve. Imposer la contrainte sur la convergence de la suite de fonctions-poids psh φ_k revient à imposer la convergence uniforme sur tout compact de Ω de la suite des fonctions $\max\{\varphi_k, t\}$ vers $\max\{\varphi, t\}$, ce pour tout t. Ceci implique la convergence de la suite de courants $T \wedge (dd^c \max\{\varphi_k, t\})^p$ vers le courant $T \wedge (dd^c \max\{\varphi, t\})^p$. On conclut alors avec le principe de localisation à la frontière. □

On obtient comme conséquence de ce résultat le

Corollaire 2.7.3 *Les nombres de Lelong au sens classique $\nu(T, x)$ dépendent de manière semi-continue supérieurement du point x.*

Preuve. Il suffit de choisir les fonctions-poids $\varphi_k = \log|z - x^{(k)}|$ lorsque l'on se donne une suite $x^{(k)} \to x$. □

2.8 Théorèmes de comparaison

On présente maintenant deux versions « quantifiées » de la variation des nombres de Lelong généralisés en fonction des fonctions-poids (pour un courant fixé) ou des courants (ici de Monge-Ampère).

Le premier théorème de comparaison quantifie la dépendance en les fonctions-poids psh. Pour une fonction-poids psh φ, notons $L(\varphi) = \varphi^{-1}(-\infty)$.

Théorème 2.8.1 *Soit $T \in \mathcal{D}_p^+(\Omega)$ et φ, ψ deux fonctions-poids psh telles que*

$$\limsup \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} = l < \infty \quad \text{lorsque } z \to L(\varphi),\ z \in \operatorname{supp} T;$$

alors $\nu(T,\psi) \leq l^p\,\nu(T,\varphi)$. En conséquence, si la limite $\lim \psi(z)/\varphi(z) = l$ existe, alors $\nu(T,\psi) = l^p\,\nu(T,\varphi)$.

Preuve. Il suffit d'établir $\nu(T,\psi) \leq \nu(T,\varphi)$, à condition que $l < 1$. Ceci résultera encore du principe de localisation à la frontière.

Pour $c > 0$, notons $u_c = \max\{\psi - c, \varphi\}$. Si $t < r$, alors, pour c suffisamment grand, $u_c = \varphi$ on $B_r^\varphi \setminus B_t^\varphi$ et donc $\nu(T,\varphi,r) = \nu(T,u_c,r) \geq \nu(T,u_c)$.

D'autre part, du fait que $l < 1$, $u_c = \psi - c$ sur B_s^φ pour $s << t$ et ainsi, $\nu(T,u_c) = \nu(T,\psi - c) = \nu(T,\psi)$. □

Le second théorème de comparaison (que l'on prouve à l'aide d'arguments similaires) quantifie la dépendance des nombres de Lelong généralisés, pour une fonction-poids φ fixée, comme fonctions de courants de Monge-Ampère.

Théorème 2.8.2 *Soit $T \in \mathcal{D}_p^+(\Omega)$ et u_k, $v_k \in PSH(\Omega)$, $1 \leq k \leq q$, telles que les courants $dd^cu_1 \wedge \ldots \wedge dd^cu_q \wedge T$ et $dd^cv_1 \wedge \ldots \wedge dd^cv_q \wedge T$ sont bien définis $v_k = -\infty$ sur $\operatorname{supp} T \cap L(\varphi)$, et*

$$\limsup \frac{u_k(z)}{v_k(z)} = l_k < \infty \text{ quand } z \to L(\varphi),\ z \in \operatorname{supp} T \setminus v_k^{-1}(-\infty),\ 1 \leq k \leq q.$$

Alors $\nu(dd^cu_1 \wedge \ldots \wedge dd^cu_q \wedge T, \varphi) \leq l_1 \ldots l_q\, \nu(dd^cv_1 \wedge \ldots \wedge dd^cv_q \wedge T, \varphi)$.

Ces résultats permettent d'obtenir des preuves relativement simples de résultats fondamentaux concernant les nombres de Lelong pour les fonctions psh ou pour les courants positifs fermés. Par exemple, le premier théorème de comparaison implique le résultat suivant :

Corollaire 2.8.3 *Le nombre de Lelong d'un courant positif fermé en un point est indépendant du choix du système local de coordonnées au voisinage de ce point. En particulier $\nu([M], x) = 1$ en tout point d'une variété analytique complexe lisse.*

Nous sommes maintenant aussi en mesure de prouver le théorème de Thie concernant le calcul du nombre de Lelong du courant d'intégration $[A]$ sur un sous-ensemble analytique A de dimension pure p d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$.

Corollaire 2.8.4 *If x est un point du sous-ensemble analytique fermé A, alors $\nu([A], x)$ est égal à la multiplicité de A au point x.*

Preuve. On suppose que x est un point singulier de A. On rappelle que l'on peut trouver un voisinage U de x et un système local de coordonnées $(z', z'') \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{n-p}$ de manière à ce que

$$A \cap U \subset K = \{(z', z'') : \, |z''| \leq C|z'|\}, \; C > 0.$$

En ces coordonnées $x = 0$. Soient $\mathbb{B}' \subset \mathbb{C}^p$, $\mathbb{B}'' \subset \mathbb{C}^{n-p}$ telles que $\mathbb{B}' \times \mathbb{B}'' \subset U$. La projection $\rho : A \cap (\mathbb{B}' \times \mathbb{B}'') \to \mathbb{B}'$ est propre et finie, c'est donc un revêtement ramifié de $\mathbb{B}'$. Le nombre m_x de feuillets de ce revêtement ρ est par définition la *multiplicité* de A en x.

On prend $\varphi(z) = \log|z| = \frac{1}{2}\log(|z'|^2 + |z''|^2)$, $\psi(z) = \log|z'|$. Alors $\varphi(z)/\psi(z) \to 1$ lorsque $z \to 0$ dans le cône K (et par conséquent sur A). Alors

$$\nu([A], x) = \nu([A], \varphi) = \nu([A], \psi).$$

De plus

$$\begin{aligned} \nu([A], \psi) &= r^{-2p} \int_{B^{\psi}_{\log r}} [A] \wedge \left(\frac{1}{2} dd^c e^{2\psi}\right)^p \\ &= r^{-2p} \int_{Reg\, A \cap \{z : |z'| < r\}} \left(\frac{1}{2} dd^c |\rho(z)|^2\right)^p \\ &= m_x \, r^{-2p} \int_{\mathbb{B}'_r} (dd^c|z'|)^p = m_x, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. $\square$

Le second théorème de comparaison montre que la masse résiduelle de Monge-Ampère $(dd^c u)^n(x)$ est fonction du comportement asymptotique de la fonction psh u lorsque l'on s'approche de x. Ceci conduit à la notion de *singularités psh* en x comme classes d'équivalence des fonctions psh relativement à leur comportement asymptotique lorsque l'on s'approche de x.

En particulier, les fonctions $\max_j \log |z_j|^{a_j}$ et $\log \sum_j |z_j|^{a_j}$ (lorsque les a_k sont des réels strictement positifs) représentent la même singularité psh en 0. De plus

$$(dd^c \max_j \log |z_j|^{a_j})^n = (dd^c \log \sum_j |z_j|^{a_j})^n = a_1 \dots a_n \, \delta_0 \tag{2.8.7}$$

(on a exploité ce fait lorsque l'on a relié les nombres de Lelong directionnels $\nu(u, x, a)$ aux nombres de Lelong généralisés $\nu(u, \varphi_{a,x})$ relativement aux fonctions-poids psh directionnelles $\varphi_{a,x}$). Ce dernier point (2.8.7) se prouve comme suit.

Suivant des arguments d'approximation, il suffit de considérer le cas où les a_j sont des nombres rationnels strictement positifs. De plus, du fait de l'homogénéité, on peut même supposer que les a_j sont des entiers pairs, $a_j = 2m_j$. On observe que les deux courants en jeu sont supportés par l'origine. La première égalité résulte donc du Théorème 2.8.2. Pour évaluer la masse des courants en 0, on invoque une représentation des nombres de Lelong généralisés comme densités de mesures (Proposition 2.5.5). Si l'on note $\varphi(z) = \frac{1}{2} \log \sum |z_j|^{2m_j}$, alors

$$\begin{aligned} \int_{B^{\varphi}_{\log r}} (dd^c \varphi)^n &= r^{-2n} \int_{B^{\varphi}_{\log r}} \left(\frac{1}{2} dd^c e^{\varphi} \right)^n = m_1 \dots m_n \, r^{-2n} \int_{\mathbb{B}_r} (dd^c |w|)^n \\ &= m_1 \dots m_n \, 2^n = a_1 \dots a_n. \end{aligned}$$

Une autre application du second principe de comparaison est le résultat suivant qui permet de comparer le nombre de Lelong d'un courant réalisé comme produit extérieur avec les nombres de Lelong des courants intervenant comme facteurs dans ce produit.

Corollaire 2.8.5 *Si $dd^c u_1 \wedge \dots \wedge dd^c u_q$ est bien défini, alors*

$$\nu(dd^c u_1 \wedge \dots \wedge dd^c u_q \wedge T, x) \geq \nu(u_1, x) \dots \nu(u_q, x) \, \nu(T, x).$$

En particulier

$$(dd^c u)^n(x) \geq \nu(u, x)^n.$$

3 Types relatifs et indice d'intégrabilité

Nous allons maintenant étudier d'autres caractéristiques des singularités psh. La première, le *type relatif* est une autre généralisation assez élémentaire du nombre de Lelong [R06]. La seconde, introduite dans [Sk72] comme l'*indice d'intégrabilité*[3], malgré la simplicité de sa définition, est une notion plus d'abord plus difficile ; en particulier, en prouver les principales propriétés requiert des techniques plus avancées d'« analyse dure ». Pour la sous-section, voir [R06] et pour la sous-section 3.2, voir [DK01] et [K94].

3.1 Types relatifs

Le nombre de Lelong au sens classique $\nu(u, x)$ peut être défini de deux manières :

$$\nu(u, x) = \liminf_{z \to x} \frac{u(z)}{\log |z - x|} = dd^c u \wedge (dd^c \log |\cdot - x|)^{n-1}(\{x\}).$$

La seconde définition comme masse résiduelle de Monge-Ampère s'est révélée très utile car elle a permis de mettre en lumière les relations avec la géométrie analytique et qu'elle autorise l'usage de la machinerie des opérateurs différentiels. Le fait de remplacer la fonction $\log |\cdot - x|$ par des fonctions-poids psh φ quelconques lors de l'introduction par Demailly des nombres de Lelong généralisés en a rendu la théorie à la fois plus souple et plus puissante.

Mais d'autre part la première définition « élémentaire » du nombre de Lelong comme limite inférieure est intimement liée au comportement asymptotique des fonction psh au voisinage de leurs singularités. L'estimation

$$u(z) \leq \nu(u, x) \log |z - x| + O(1)$$

donne la meilleure borne possible pour $u(z)$ lorsque $z \to x$ en termes de la singularité « modèle » $\log |z - x|$.

Ceci motive l'introduction d'une autre généralisation du nombre de Lelong basée sur le principe de comparaison du comportement asymptotique des fonctions psh avec celui des poids psh modèles φ. Afin de pouvoir obtenir des estimations ponctuelles, on se doit d'imposer un certain nombre de conditions aux fonctions-poids psh. Plus précisément, ceci fonctionne si les

3. Son inverse est connu comme le *seuil log-canonique*, ou encore l'*exposant de singularité complexe*.

fonctions-poids psh φ sont des fonctions psh maximales sur des voisinages épointés de x, ce qui est caractérisé par l'équation

$$(dd^c\varphi)^n = 0 \text{ hors de } x.$$

De telles fonctions-poids psh sont dites *maximales*.

Définition 3.1.1 Étant donné un *poids maximal* φ, on appelle *type de u relatif à* φ le nombre

$$\sigma(u,\varphi) = \liminf_{z\to x} \frac{u(z)}{\varphi(z)}.$$

Alors, en suivant le même argument que pour $\log|z-x|$, on obtient l'estimation

$$u(z) \leq \sigma(u,\varphi)\,\varphi(z) + O(1)$$

lorsque $z \to x$.

Exemple 3.1.2 Des exemples modèles de types relatifs sont ceux relatifs aux poids directionnels

$$\varphi_{a,x} = \max_k a_k^{-1} \log|z_k - x_k|, \quad a_k > 0.$$

Dans ce cas, les nombres

$$\sigma(u,\varphi_{a,x}) = \nu(u,x,a),$$

sont les nombres de Lelong directionnels.

Comme on le montre aisément, les types relatifs dépendent, comme les nombres de Lelong classique, dépendent de manière semi-continue supérieure des entrées psh u ou φ.

Proposition 3.1.3

(i) Si $u_j \to u$ dans L^1_{loc}, alors $\sigma(u,\varphi) \geq \limsup \sigma(u_j,\varphi)$.

(ii) Si $e^{\varphi_j} \to e^{\varphi}$ uniformément, alors $\sigma(u,\varphi) \geq \limsup \sigma(u,\varphi_j)$.

Le pendant du *premier théorème de comparaison* est l'inégalité

$$\sigma(u,\varphi) \geq \sigma(u,\psi)\,\sigma(\psi,\varphi),$$

qui implique $\sigma(u,\psi) = l\,\sigma(u,\varphi)$, sous la condition que $\varphi/\psi \to l$. Le *second théorème de comparaison* se formule comme suit : *si* $\liminf u(z)/v(z) = l$*, alors* $\sigma(u,\varphi) \geq l\,\sigma(v,\varphi)$. On note qu'il s'agit là de résultats beaucoup plus faciles que les résultats analogues pour les nombres de Lelong généralisés par Demailly.

Comme les nombres de Lelong au sens classique, le type relatif vérifie

$$\sigma\left(\max_k u_k\right) = \min_k \sigma(u_k)$$

pour une famille finie de fonctions psh u_k, tandis que le type relatif d'une somme de fonctions peut différer de la somme des types relatifs sans toutefois être inférieur à cette somme.

Le premier théorème de comparaison (Théorème 2.8.1) pour des courants implique que les nombres de Lelong généralisés et les types relatifs sont liés par l'inégalité

$$\nu(u,\varphi) \geq m_\varphi\,\sigma(u,\varphi),$$

où $m_\varphi = (dd^c\varphi)^n(x)$. On ignore s'il existe une inégalité en sens contraire.

Il est intéressant de mentionner que les types relatifs vus comme fonctionnelles sur les singularités psh peuvent être caractérisés par certaines de leurs propriétés de base :

Théorème 3.1.4 *Soit une fonction* $\sigma : \mathrm{PSH}_x \to [0,\infty]$ *telle que*

(i) $\sigma(cu) = c\,\sigma(u)$ *pour tout* $c > 0$ *;*

(ii) si $u_1 \leq u_2 + O(1)$ *près de* x*, alors* $\sigma(u_1) \geq \sigma(u_2)$ *;*

(iii) $\sigma(\max_k u_k) = \min_k \sigma(u_k)$*,* $k = 1,2$ *;*

(iv) si $u_j \to u$ *dans* L^1_{loc}*, alors* $\limsup \sigma(u_j) \leq \sigma(u)$ *;*

(v) $\sigma(\log|\cdot - x|) > 0$.

Il existe alors une fonction-poids maximales psh φ *telle que* $\sigma(u) = \sigma(u,\varphi)$ *pour tout* $u \in \mathrm{PSH}_x$*. La représentation est essentiellement unique : si deux poids* φ *et* ψ *représentent* σ*, alors* $\varphi = \psi + O(1)$ *près de* x*.*

Preuve. Soit D un voisinage hyperconvexe borné de x. On introduit la fonction

$$\varphi(z) = \sup\{u(z) : \ u \in \mathcal{M}_\sigma\},$$

où $\mathcal{M}_\sigma = \{u \in \mathrm{PSH}^-(D) : \ \sigma(u) \geq 1\}$ et l'on montre que $\sigma(\cdot) = \sigma(\cdot, \varphi)$. □

Comme on le verra plus loin, une variante du théorème d'analyticité de Siu est aussi valable pour les types relatifs.

3.2 Indice d'intégrabilité (et seuil log-canonique)

Une autre manière de quantifier la singularité de u est d'étudier l'intégrabilité locale de $e^{-u/\gamma}$ pour $\gamma > 0$ (note que du fait que u peut être discontinue, même l'intégrabilité de e^{-u} près d'un point x où $u(x) > -\infty$ est loin d'être évidente).

Définition 3.2.1 Le nombre

$$I(u, x) = \inf\{\gamma > 0 : e^{-u/\gamma} \in L^2_{loc}(x)\} \tag{3.2.1}$$

est appelé *indice d'intégrabilité*, ou encore *multiplicité d'Arnold*, de u en x. Son inverse

$$lct(u) = (I(u, x))^{-1} = \sup\{c > 0 : e^{-c\,u} \in L^2_{loc}(x)\},$$

est appelé *seuil log-canonique*, ou encore *exposant de singularité complexe* en x.

De manière analogue à ce qui se passe pour les nombres de Lelong , plus fortes sont les singularités, plus grands sont les indices d'intégrabilité : $I(u, x) \geq I(v, x)$ si $u \leq v + O(1)$, et $I(c\,u, x) = c\,I(u, x)$. De plus, comme cela résulte de l'inégalité de Hölder,

$$I(u + v, x) \leq I(u, x) + I(v, x) : \tag{3.2.2}$$

si en effet $a > I(u, x)$, $b > I(v, x)$, alors

$$\int e^{\frac{-2(u+v)}{a+b}}\,\beta_n \leq \left(\int e^{-2u/a}\,\beta_n\right)^{1/p} \left(\int e^{-2v/b}\,\beta_n\right)^{1/q}$$

avec $p = \frac{a+b}{a}$ et $q = \frac{a+b}{b}$.

En dimension un, l'indice d'intégrabilité coïncide avec la masse ponctuelle de la mesure de Riesz, c'est-à-dire avec le nombre de Lelong :

Proposition 3.2.2 *Si $n = 1$, alors $I(u, x) = \nu(u, x)$.*

Preuve. On exploite la représentation intégrale de u comme somme du potentiel logarithmique de sa mesure de Riesz et d'une fonction harmonique. □

Remarque 3.2.3 Comme conséquence immédiate de ce résultat, on déduit que si $n = 1$ et si u est telle que $I(u, x) > 0$, alors

$$e^{-u/I(u,x)} \notin L^2_{loc}(x), \tag{3.2.3}$$

ce qui dans ce cas résulte de la majoration

$$u(z) \leq \nu(u, x) \log |z - x| + O(1)$$

et du fait évident que $|z|^{-1} \notin L^2_{loc}(0)$. La même propriété subsiste en dimension supérieure, mais il s'agit d'un résultat beaucoup plus difficile connue la *conjecture d'ouverture* de Demailly et Kollár (2001) prouvée par Berndtsson en 2013. On y reviendra dans peu de temps.

Exemples 3.2.4 $I(\log |z|, 0) = 1/n$. Plus généralement, si l'on dispose de blocs de coordonnées $z = (z', z'') \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$, alors $I(\log |z'|, 0) = 1/k$.

Un outil important est la *formule de restriction*.

Théorème 3.2.5 (Demailly–Kollár) *Si Y est une sous-variété analytique complexe (lisse) plongée dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et si $x \in Y$, alors*

$$I(u|_Y, x) \geq I(u, x).$$

Ce résultat se déduit facilement du théorème d'Ohsawa-Takegoshi (dont nous allons parler bientôt, voir la sous-section 4.2). Observons, au vu des exemples mentionnés ici, que l'indice d'intégrabilité, au contraire du nombre de Lelong, est très sensible à la dimension du lieu singulier et l'on ne peut espérer l'égalité (dans l'inégalité précédente) lorsque la sous-variété lisse Y est générique.

Les indices d'intégrabilité sont liés aux nombres de Lelong par les *inégalités de Skoda* :

Proposition 3.2.6 *On a*

$$\frac{1}{n}\,\nu(u,x) \leq I(u,x) \leq \nu(u,x),$$

les situations limite étant réalisées respectivement pour $u = \log|z_1|$ *et* $u = \log|z|$.

Preuve. La première inégalité résulte de l'estimation

$$u \leq \nu(u,x)\log|z-x| + O(1).$$

La seconde de déduit de la formule de restriction (Théorème 3.2.5) si l'on considère la restriction de u à une droite complexe l telle que l'on dispose des égalités (et non des inégalités) $I(u|_l, x) = \nu(u|_l, x) = \nu(u,x)$. □

Remarque 3.2.7 On doit à Kiselman une borne inférieure plus précise :

$$I(u,x) \geq \sup_{a\in\mathbb{R}_+^n} \frac{\nu(u,x,a)}{\sum_j a_j},$$

qui résulte de la majoration $u \leq \Psi_{u,x}+O(1)$ et du calcul de l'indice d'intégrabilité pour les indicatrices $\Psi_{u,x}$.

À l'instar des divers types de nombres de Lelong, l'indice d'intégrabilité dépend de manière semi-continue supérieure de la fonction u :

Théorème 3.2.8 *Si les* $u_j \to u$ *dans* $L^1_{loc}(\Omega)$, *alors*

$$\limsup_{j\to\infty} I(u_j,x) \leq I(u,x),\ \ x \in \Omega.$$

De plus, si $e^{-u} \in L^2_{loc}(x)$, *alors* $e^{-u_j} \to e^{-u}$ *dans* $L^2_{loc}(x)$.

Si l'on applique la seconde assertion à la suite des $u_j := u/\gamma_j$ avec $\gamma_j \searrow I(u,x)$, on obtient la propriété d'ouverture (3.2.3).

Dans le cas $n = 1$, une preuve du Théorème 3.2.8 se déduit de la représentation de l'indice d'intégrabilité comme masse de Riesz en x. On attend pour l'étude du cas $n > 1$ d'avoir introduit un outil adapté.

Un objet analytique permettant de représenter les singularités de u est le *faisceau d'idéaux multiplicateur* $\mathcal{J}(u)$ dont la fibre $\mathcal{J}_x(u)$ consiste en les germes en x de fonctions holomorphes f tels que $|f|e^{-u} \in L^2_{loc}(x)$. Il s'agit d'un faisceau d'idéaux cohérent. De plus, si $U \subset\subset \Omega$ est un ouvert pseudoconvexe, alors la restriction de $\mathcal{J}(u)$ à U est engendrée comme $\mathcal{O}_U$-module par une base hilbertienne $\{\sigma_l\}$ de l'espace de Hilbert $H_u(U)$ des fonctions f holomorphes dans U et telles que $|f|e^{-u} \in L^2(U)$. On utilisera ceci très prochainement.

4 Théorèmes d'analyticité

De profonds résultats sur les singularités psh (comme par exemple le célèbre théorème d'analyticité de Siu) reposent sur des méthodes relevant de l'« analyse dure », principalement des techniques d'extension L^2. Nous énoncerons ici sans preuves deux résultats majeurs (dus à Hörmander–Bombieri–Skoda et Ohsawa–Takegoshi) et montrerons comment on peut en déduire l'analyticité des sur-ensembles de niveau pour les caractéristiques des singularités psh. Nous ferons aussi appel aux techniques L^2 pour prouver le théorème d'approximation de Demailly et établir des propriétés fondamentales des indices d'intégrabilité.

Voir [BłLN2], [D92], [Dbook] (Chapitres III et VIII), [Fo], [K94], [R09].

4.1 Théorèmes d'extension L^2

La plurisousharmonicité ne préjuge pas de l'analyticité. Cependant, des sous-variétés analytiques se trouvent générées par toute fonction psh (de plus, par tout courant positif fermé) présentant de suffisamment « fortes » singularités.

Un pont entre plurisousharmonicité et analyticité consiste justement en les théorèmes d'extension L^2 reposant sur les résultats du type de ceux établis par Hörmander et concernant la résolution de l'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}$. Les deux résultats ci-dessous sont en particulier d'une grande importance dans l'étude des singularités des fonctions psh.

Théorème 4.1.1 (Hörmander–Bombieri–Skoda) *Si u est une fonction psh sur un domaine pseudoconvexe borné Ω et que $e^{-u} \in L^2_{loc}(x)$ pour un $x \in \Omega$,* *alors il existe une fonction f holomorphe dans Ω telle que*

$$\int_\Omega |f|^2 e^{-2u}\, \beta_n < \infty$$

et que $f(x) = 1$.

Théorème 4.1.2 (Ohsawa–Takegoshi) *Soit Y un sous-espace affine p-dimensionnel de $\mathbb{C}^n$, Ω un domaine borné pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ et $u \in PSH(\Omega)$. Alors toute fonction $h \in Hol(Y \cap \Omega)$ qui vérifie*

$$\int_{Y\cap\Omega} |h|^2 e^{-u}\, \beta_p < \infty$$

se prolonge en une fonction $f \in Hol(\Omega)$ de manière à ce que

$$\int_\Omega |f|^2 e^{-u}\, \beta_n \leq A(p, n, \operatorname{diam}\Omega) \int_{Y\cap\Omega} |h|^2 e^{-u}\, \beta_p.$$

Comme on le verra, de tels résultats (ainsi que ceux qui leur sont reliés) assurent que les caractéristiques considérées des singularités psh véhiculent certains caractères relevant de l'analyticité. Notamment, il y a semi-continuité de ces caractéristiques relativement à la topologie de Zariski (analytique), celle pour laquelle les fermés sont les sous-ensembles analytiques fermés.

4.2 Indice d'intégrabilité

1. À l'aide du théorème d'Ohsawa–Takegoshi, nous sommes maintenant en mesure de prouver *la formule de restrction pour l'indice d'intégrabilité* : $I(u|_Y, x) \geq I(u, x)$.

   Preuve du Théorème 3.2.5. Soit $\gamma > I(u|_Y, x)$; alors

   $$\int_{\mathbb{B}(x,r)\cap Y} e^{-2u/\gamma}\, \beta_p < \infty.$$

   Il existe donc $F \in \mathcal{O}(\mathbb{B}(x, r))$ telle que $F|_Y = 1$ et que

   $$\int_{\mathbb{B}(x,r)} |F|^2 e^{-2u/\gamma}\, \beta_n < \infty.$$

   Du fait que $F(x) = 1$, on a $\gamma > I(u, x)$. ☐

2. Montrons maintenant comment le théorème d' Ohsawa–Takegoshi conduit à une preuve de la *Conjecture d'Ouverture* et de la *semicontinuité de l'indice d'intégrabilité*. On utilisera pour ce faire les arguments de [GuaZh15] et [Hi14].

   Esquisse de preuve du Théorème 3.2.8, $n > 1$. Dans le cadre un-dimensionnel, le point crucial est le fait de disposer de l'estimation uniforme
$$\int_\Omega e^{-2cu_j}\,\beta_1 \le M,\ j \ge j_0$$
   pour un seuil $c > 1$ et tous les $j > j_0$, ce qui résulte dans ce cas de la semicontinuité supérieure des nombres de Lelong. En dimension supérieure, se substitue à cet argument le recours au théorème d'Ohsawa-Takegoshi.

   On raisonne par récurrence sur la dimension n. On suppose que l'on a $u, u_j \in \mathrm{PSH}(D)$, que ces fonctions sont négatives et que le polydisque unité $\mathbb{D}^n$ est relativement compact dans le domaine D. Le théorème de Fubini implique
$$\int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}^{n-1}} e^{-2u(z',z_n)}\,\beta_{n-1}(z')\,\beta_1(z_n) < \infty.$$
   Il existe donc, pour tout $\epsilon > 0$, $\eta > 0$ suffisamment petit et un sous-ensemble $E \Subset \mathbb{D}_\eta \setminus \{0\}$ de mesure positive tels que
$$\int_{\mathbb{D}^{n-1}} e^{-2u(z',w_n)}\,\beta_{n-1}(z') < \frac{\epsilon^2}{|w_n|^2}$$
   pour tout $w_n \in E$. On peut alors choisir w_n de telle manière que la suite $u_j(\cdot, w_n)$ converge vers $u(\cdot, w_n)$. L'hypothèse de récurrence permet alors d'affirmer qu'il existe $c > 1$ avec aussi
$$\int_{\mathbb{D}^{n-1}} e^{-2c\,u_j(z',w_n)}\,\beta_{n-1}(z') < \frac{\epsilon^2}{|w_n|^2},\ j \ge j_0.$$
   D'après le théorème d'Ohsawa–Takegoshi theorem, on peut construire des fonctions f_j holomorphes $\mathbb{D}^n$ telles que $f_j(z', w_n) \equiv 1$ et que d'autre part
$$\int_{\mathbb{D}^n} |f_j|^2 e^{-2c\,u_j}\,\beta_n < A\,\frac{\epsilon^2}{|w_n|^2},\ j \ge j_0.$$

On peut alors montrer que pour $\epsilon < 1/2$, l'inégalité $|f_j| \geq 1/4$ est satisfaite sur un voisinage ω of 0 et qu'ainsi

$$\int_\omega e^{-2cu_j}\,\beta_n \leq M,\ \ j \geq j_0.$$

Le reste de la preuve est alors identique à celle que l'on fait dans le cadre un-dimensionnel. $\square$

3. On en vient maintenant à la preuve du *théorème d'analyticité pour l'indice d'intégrabilité*. Un résultat fondamental en ce sens est la semi-continuité au sens de Zariski (analytique) de l'application $x \mapsto I(u,x)$.

   Notation 4.2.1 *Le sous-ensemble* $IE_c(u) = \{x : I(u,x) \geq c\}$ est dit *sur-ensemble de niveau pour l'indice d'intégrabilité* (ou, de manière équivalente, *sous-ensemble de niveau pour le seuil log-canonique*).

   Théorème 4.2.2 *Si* $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$*, alors* $IE_c(u)$ *est un sous-ensemble analytique fermé de* Ω *pour tout* $c > 0$*.*

   Preuve. On note

$$N_u = \{x \in \Omega : e^{-u} \notin L^2_{loc}(x)\}.$$

   Il s'agit d'un sous-ensemble analytique fermé de Ω. En effet, si $x \in N_u$, alors $f(x) = 0$ pour toute fonction f de l'ensemble

$$\mathcal{H}_u = \{f \in \mathcal{O}(\Omega) : \int_\Omega |f|^2 e^{-2u}\,\beta_n < \infty\},$$

   ce qui implique $N_u \subset \cap\{f^{-1}(0) : f \in \mathcal{H}_u\}$. L'inclusion dans le sens contraire résulte du Théorème d'Hörmander-Bombieri-Skoda 4.1.1.

   Maintenant, comme on a

$$IE_c(u) = \bigcap_{a<c} N_{u/a},$$

   la preuve est bien complète. $\square$

4.3 Le théorème d'approximation de Demailly

Afin de donner une courte preuve du théorème d'analyticité de Siu pour les nombres de Lelong, nous présentons ici une technique d'approximation due à Demailly, qui s'avère être un outil extrêmement utile au service de l'étude des singularités psh.

Définition 4.3.1 Étant donnée $u \in PSH(\Omega)$, on considère les *idéaux multiplicateurs*

$$\mathcal{J}(mu) = \{f \in \mathcal{O}(\Omega) : \int_\Omega |f|^2 e^{-2mu} \beta_n < \infty\}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

comme des espaces de Hilbert à poids $\mathcal{H}_m = \mathcal{H}_{m,u}(\Omega)$, le produit scalaire étant

$$(f, g)_m = \int_\Omega f\, \bar{g}\, e^{-2mu} \beta_n.$$

Si $\{\sigma_l^{(m)}\}_l$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}_m$, alors $K_m(z) := \sum_l |\sigma_l^{(m)}(z)|^2$ est le noyau de Bergman pour $\mathcal{H}_m$, la série ici en jeu étant uniformément convergente sur tout compact de Ω. On note

$$u_m = \mathcal{D}_m u = \frac{1}{2m} \log K_m \in \mathrm{PSH}(\Omega).$$

On observe que

$$u_m(z) = \frac{1}{m} \sup\{\log |f(z)| : ||f||_m < 1\} \tag{4.3.1}$$

car $K_m(z)^{1/2}$ est la norme de la fonctionnelle d'évaluation $f \mapsto f(z)$.

Théorème 4.3.2 [D92]

(i) Il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $z \in \Omega$ et tout $r < \mathrm{dist}\,(z, \partial\Omega)$,

$$u(z) - \frac{C_1}{m} \leq u_m(z) \leq \sup_{\zeta \in B_r(z)} u(\zeta) + \frac{1}{m} \log \frac{C_2}{r^n}. \tag{4.3.2}$$

En particulier $u_m \to u$ à la fois ponctuellement et dans $L^1_{loc}(\Omega)$.

(ii)

$$\nu(u, x) - \frac{n}{m} \leq \nu(u_m, x) \leq \nu(u, x) \quad \forall x \in \Omega.$$

(iii)

$$I(u,x) - \frac{1}{n} \le I(u_m,x) \le I(u,x).$$

Preuve. Pour $f \in \mathcal{H}_m$,

$$|f(z)|^2 \le \frac{1}{\tau_n r^{2n}} \int_{\mathbb{B}_r(z)} |f|^2\, \beta_n \le \frac{||f||_m^2}{\tau_n r^{2n}}\, e^{2m \sup\{u(\zeta):\, \zeta \in \mathbb{B}_r(z)\}},$$

ce qui, si l'on invoque (4.3.1), fournit la seconde inégalité dans (4.3.2).

Pour prouver la première inégalité, on utilise le théorème d' Ohsawa–Takegoshi (plus exactement, le cas particulier où Y est un point). Plus précisément, pour tout $z \in \Omega$ et $a \in \mathbb{C}$, il existe une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $f(z) = a$ et

$$\int_\Omega |f|^2 e^{-2m\,u} \beta_n \le A\, |a|^2 e^{-2m\,u(z)}.$$

Si l'on choisit a pour que le membre de droite dans l'inégalité ci-dessus vaille 1, on a donc $||f_m||_m \le 1$ et ainsi

$$u_m(z) \ge \frac{1}{m} \log |f(z)| = \frac{\log |a|}{m} = u(z) - \frac{\log C}{m}.$$

Les assertions (ii) et (iii) découlent de (i). □

Remarque 4.3.3 Cela vaut la peine de mentionner ici que les fonctions u_m du Théorème 4.3.2 contrôlent non seulement les nombres de Lelong au sens classique, mais aussi tous les nombres de Lelong directionnels :

$$\nu(u,x,a) - m^{-1} \sum_j a_j \le \nu(u_m,x,a) \le \nu(u,x,a) \quad \forall x \in \Omega,\ \forall a \in \mathbb{R}_+^n.$$

De plus, un résultat similaire est vrai pour les types relatifs $\sigma(u_m, \varphi)$ relativement à des fonctions-poids psh qui sont exponentiellement Hölder continues, c'est-à-dire satisfont :

$$e^{\varphi(x)} - e^{\varphi(y)} \le C\, |x-y|^\alpha;$$

voir [R01], [BoFJ08], [R13].

4.4 Sur-ensembles de niveau pour les nombres de Lelong

Soit $T \in \mathcal{D}_p^+(\Omega)$ et

$$E_c(T) := \{x \in \Omega : \nu(T,x) \geq c\}, \ c > 0,$$

les *sur-ensembles de niveau pour les nombres de Lelong de T*.

Comme la fonction $x \mapsto \nu(T,x)$ est semi-continue inférieurement (pour la topologie usuelle), tout sous-ensemble $E_c(T)$ est fermé.

Proposition 4.4.1 *$E_c(T)$ est de $2p$-mesure de Hausdorff localement finie.*

Preuve. On utilise la majoration de la mesure trace du courant T,

$$\sigma_T(\mathbb{B}_\epsilon(x)) \geq \epsilon^{2p}\nu(T,x),$$

pour conclure que

$$\mathcal{H}_p(K_c) \leq C \liminf_{\epsilon \to 0} \sigma_T(K_c + \mathbb{B}_\epsilon) < \infty$$

pour les sous-ensembles $K_c = E_c(T) \cap K, \ K \subset\subset \Omega$. □

L'étape suivante permet de ramener le cas des courants positifs fermés à celui des fonctions psh :

Théorème 4.4.2 *Étant donné $T \in \mathcal{D}_p^+(\Omega)$, il existe $u \in PSH(\Omega)$ telle que $\nu(T,x) = \nu(u,x)$ pour tout x.*

Esquisse de preuve. On considère le « potentiel canonique »

$$U_j(z) = -\omega_p^{-1} \int |z-\zeta|^{-2p} \eta_j(\zeta)\, d\sigma_T(\zeta)$$

où η_j est une fonction-plateau positive ou nulle a non-negative, lisse et de support compact inclus dans Ω, identiquement égale à 1 dans un voisinage de $\overline{\Omega}_j \subset\subset \Omega$. Ce potentiel canonique est sous-harmonique dans $\mathbb{R}^{2n}$, et sa mesure de Riesz satisfait

$$\sigma_j(x,r) = \frac{1}{2\pi} \int_{B_r(x)} \Delta U_j = [1+o(1)]\tau_{n-1} r^{2n-2} \nu(T,x) + o(r^{2n-2})$$

lorsque $r \to 0$, d'où il résulte

$$\lim_{r \to 0} \frac{\sigma_j(x,r)}{\tau_{n-1} r^{2n-2}} = \nu(T,x) \quad \forall x \in \Omega_j.$$

On peut montrer que $dd^c U_j \geq -N_j \, dd^c |z|^2$, et donc que

$$u_j(z) := U_j(z) + N_j \, |z|^2 + M_j$$

est psh et que $\nu(T,x) = \nu(u_j,x)$ pour tout $x \in \Omega_j$. En exhaustant Ω avec les Ω_j on obtient la fonction psh voulue u. $\square$

Voici comment s'énonce le résultat principal de cette sous-section.

Théorème 4.4.3 (Siu) *Si $T \in \mathcal{D}_p^+(\Omega)$ et que $c > 0$, alors $E_c(T)$ est un sous-ensemble analytique fermé de dimension $\leq p$ de Ω.*

La preuve originelle de Siu (1974) (développant des résultats de Bombieri et Skoda) prenait environ 100 pages. Une simplification considérable fut faite par Lelong (1977) lorsqu'il réduisit le problème au cas des fonctions psh. En 1979, Kiselman utilisa une technique basée sur l'atténuation des singularités pour obtenir encore une preuve plus simple pour les nombres de Lelong au sens classique, puis en 1986 pour les nombres de Lelong directionnels. Ses idées furent reprises par Demailly qui établit le résultat en 1987 pour les nombres de Lelong généralisés. Nous donnons ici la plus courte des preuves connues pour les nombres de Lelong au sens classique, due à Demailly[D92].

Preuve. Il reste à prouver que pour toute fonction psh u, l'ensemble

$$E_c(u) := \{x \in \Omega : \ \nu(u,x) \geq c\}$$

est un sous-ensemble analytique. Soient u_m les approximations de Demailly de u par des fonctions psh présentant des singularités analytiques. Alors $\nu(u,x) \geq c$ implique

$$\nu(u_m,x) \geq c - \frac{n}{m}.$$

D'autre part, si $\nu(u,x) < c$, alors $\nu(u_m,x) < c$ pour tout m et par conséquent

$$\nu(u_m,x) < c - \frac{n}{m_0}$$

pour au moins un m_0. Ainsi donc

$$E_c(u) = \bigcap_{m \geq m_0} E_{c-n/m}(u_m).$$

On rappelle que

$$u_m = \frac{1}{2m} \log \sum_l |\sigma_l^{(m)}(z)|^2$$

avec des fonctions analytiques $\sigma_l^{(m)}$. Comme

$$x \in E_{c-n/m}(u_m) \iff \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} \sigma_l^{(m)}(x) = 0 \quad \forall \alpha : \ |\alpha| < cm - n,$$

tout sous-ensemble $E_{c-n/m}(u_m)$ est analytique, et il en est donc de même de $E_c(u)$. □

4.5 Théorème d'analyticité pour les nombres de Lelong–Demailly

Soit X une variété de Stein (par exemple, un domaine pseudoconvexe dans $\mathbb{C}^m$), et φ une fonction continue semiexhaustive psh sur $\Omega \times X$ (ce qui signifie $\{(z,x) : \ \varphi(z,x) < C\} \subset\subset \Omega \times X$ pour au moins un $C \in \mathbb{R}$). La fonction $\varphi_x(z) := \varphi(z,x)$ est un poids psh sur Ω. On note

$$E_c = E_c(T,\varphi) = \{x \in X : \nu(T,\varphi_x) \geq c\}.$$

Théorème 4.5.1 [D87], [D93], [Dbook] *Si* $\exp \varphi \in C(\Omega \times X)$ *et est Hölder continue comme fonction de* x*, alors* E_c *est un sous-ensemble analytique fermé de* X*.*

Esquisse de preuve.

1. On construit une famille de potentiels psh $u_a(x)$, $a \geq 0$ dont le comportement est déterminé par les $\nu(T,\varphi_x)$. Cette version précisée de ce qui été fait pour les nombres de Lelong au sens classique est justement ce que l'on appelle la *technique d'atténuation des singularités* due à Kiselman.
2. Soit $N_{a,b} = \{x \in X : \exp\{-u_a/b\} \notin L^2_{loc}(x)\}$; alors $E_c = \bigcap N_{a,b}$, où l'intersection est prise ici sur tous les $a < c$ et $b < (c-a)\gamma/m$, γ désignant l'exposant de Hölder de φ comme fonction de x.
3. Il résulte enfin du théorème d'analyticité pour les indices d'intégrabilité que chaque sous-ensemble $N_{a,b}$ est analytique.

4.6 Analyticité pour les types relatifs

Une approche similaire peut être conduite pour les sur-ensembles de niveau pour les types relatifs par rapport à des fonctions-poids psh maximales qui sont de plus Hölder continues.

On considère une fonction continue semiexhaustive $\varphi \in \mathrm{PSH}(\Omega \times \Omega)$, telle que l'ensemble $\{z : \varphi(z,x) = -\infty\}$ soit fini pour tout $x \in \Omega$, que $(dd^c\varphi)^n = 0$ sur $\{(x,y) : \varphi(z,x) > -\infty\}$, et que φ soit de plus Hölder exponentiellement continue en x.

Il en résulte alors que $\varphi_x(z) := \varphi(z,x)$ est une fonction-poids satisfaisant $(dd^c\varphi_x)^n = 0$ hors de $\varphi_x^{-1}(-\infty)$. On peut alors montrer que la fonction $x \mapsto \Lambda(u, \varphi_x, r) = \sup\{u(z) : \varphi_x(z) < r\}$ est psh [D85, Thm. 6.11].

En utilisant le changement d'échelle $\varphi \mapsto c\,\varphi$, $c > 0$, on peut se ramener à prouver que les sous-ensembles

$$S_1(u, \varphi, \Omega) = \{x \in \Omega : u(z) \leq \varphi(z,x) + O(1) \text{ as } z \to x\}$$

sont analytiques.

Théorème 4.6.1 [R09] *Soit $\varphi \in \mathrm{PSH}(\Omega \times \Omega)$ satisfaisant les conditions ci-dessus. Alors pour toute fonction $u \in PSH(\Omega)$, le sous-ensemble $S_1(u, \varphi, \Omega)$ est analytique.*

Ceci peut s'appliquer à la propagation des singularités analytiques du type suivant.

Corollaire 4.6.2 [R09] *On suppose que les ensembles de zéros A_j des fonctions $f_1, \ldots, f_q \in \mathcal{O}(\Omega)$, $q < n$, définissent une intersection complète, ce qui signifie* codim $Z = q$, *où $Z = \cap_j A_j$. Si une fonction $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ satisfait*

$$u \leq \log|f| + O(1) \tag{4.6.3}$$

sur un ouvert ω intersectant toutes les composantes irréuctibles Z dans Ω, alors elle satisfait (4.6.3) sur Ω tout entier.

Preuve. On peut se ramener au cas où u est strictement négative et aussi supposer qu'il existe des fonctions $f_{q+1}, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ telles que pour tout $x \in \Omega$ le sous-ensemble analytique $\{z : f_j(z) = f_j(x),\ 1 \leq j \leq n\}$ soit fini. Notons $f' = (f_1, \ldots, f_q)$ et $f'' = (f_{q+1}, \ldots, f_n)$, de manière à ce que l'estimation (4.6.3) se lise $u \leq \log|f'| + O(1)$.

Pour $m > 0$, on pose

$$\varphi_m(z,x) = \max\{\log(|f'(x) - f'(z)|, m\log|f''(x) - f''(z)|\}.$$

Cette fonction satisfait les hypothèses du Théorème 4.6.1, et par conséquent $S_1(u, \varphi_m, \Omega)$ est un sous-ensemble analytique fermé de Ω tel que

$$S_1(u, \varphi_m, \Omega) \cap \omega \supset S(\log|f'|, \varphi_m, \Omega) \cap \omega.$$

Il contient donc toutes les composantes irréductibles de $S_1(\log|f'|, \varphi_m, \Omega)$, et par conséquent le sous-ensemble analytique Z.

Étant donné $a \in Z$, on peut supposer que

$$D = \{x \in \Omega : \ \varphi_1(x,a) < 0\} \subset\subset \Omega.$$

Alors $u \leq \varphi_m(x,a)$ sur D parce que la fonction $\varphi_m(x,a)$ est justement la plus grande fonction négative psh v sur D telle que $\sigma(v, \varphi_m) \geq 1$. En faisant tendre m vers l'infini, on obtient $u \leq \log|f'|$ in D. $\square$

4.7 Formule de décomposition de Siu

L'importance du théorème fondamental de Siu peut être illustrée par des formules relatives à la structure des courants positifs fermés.

Définition 4.7.1 Soit A un sous-ensemble fermé irréductible de Ω, de dimension p. Le *nombre de Lelong générique de $T \in \mathcal{D}_p^+(\Omega)$ le long de A* est par définition

$$\nu(T, A) := \inf\{\nu(T,x) : x \in A\}.$$

Le théorème d'analyticité de Siu implique que $\nu(T,A) = \nu(T,x)$ pour tout $x \in A$ hors d'un sous-ensemble analytique fermé propre A'.

On note χ_A la fonction indicatrice du sous-ensemble analytique fermé A : $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ sinon.

Proposition 4.7.2 $\chi_A T = \nu(T,A)\,[A]$.

Preuve. On observe que $\chi_A T \in \mathcal{D}_p^+(\Omega)$. En effet $\chi_A T = T - \chi_{\Omega\setminus A} T \geq 0$ et $\chi_{\Omega\setminus A} T$ est fermé en vertu du Théorème 2.1.8 (car c'est l'extension standard de T au travers de A). Comme $\chi_A T$ est de bidimension (p,p) et est de support inclus dans un sous-ensemble analytique fermé A de dimension p, il est nécessairement de la forme $\chi_A T = \lambda[A]$, où λ est une fonction positive localement intégrable sur $Reg\, A$ (il s'agit là d'un fait général de la théorie des courants). Comme $\chi_A T$ est un courant positif fermé, λ est une constante positive ou nulle. On a de plus au final $\lambda = \nu(T, A)$ car $\nu(\lambda[A], x) = \nu(T, A)$ pour tout $x \in A \setminus A'$. □

Théorème 4.7.3 (la formule de Siu) *Pour tout courant $T \in \mathcal{D}_p^+(\Omega)$, il existe une unique décomposition*

$$T = \sum_j \lambda_j [A_j] + R, \tag{4.7.4}$$

où $\lambda_j > 0$, chaque $[A_j]$ est un courant d'intégration sur un sous-ensemble analytique fermé irréductible A_j de dimension p, et $R \in \mathcal{D}_p^+(\Omega)$ est tel que $\dim E_c(R) < p$ *pour tout $c > 0$. Les nombres λ_j sont de plus les nombres de Lelong génériques de T le long des sous-ensembles analytiques fermés A_j.*

Preuve. Soient $\{A_j\}$ la collection (au plus dénombrable) des composantes irréductibles de dimension p des sous-ensembles analytiques

$$\{E_c(T)\}_{c \in \mathbb{Q}_+},$$

et soit $\lambda_j = \nu(T, A_j)$. Alors la suite de courants Then the sequence of currents

$$R_1 := T - \lambda_1[A_1] \in \mathcal{D}_p^+(\Omega),\ R_2 := R_1 - \lambda_2[A_2] \in \mathcal{D}_p^+(\Omega), \ldots$$

converge en décroissant vers un courant $R \in \mathcal{D}_p^+(\Omega)$, ce qui fournit la décomposition (4.7.4). De plus $\dim E_c(R) < p$ pour tout $c > 0$ car on a $\nu(R, A_j) = 0$ pour tout j. □

Des composantes de dimension strictement inférieure à p peuvent fort bien apparaitre dans $E_c(R)$, toutefois $\chi_A R = 0$ pour tout sous-ensemble analytique fermé A de dimension p.

4.8 Formule de King–Demailly

On peut spécifier la formule de Siu concernant la décomposition structurelle des courants positifs fermés au cas où $T = (dd^c \log |f|)^p$,

$$f = (f_1, \ldots, f_q) : \Omega \to \mathbb{C}^q$$

étant une application holomorphe. Soient $\{A_j\}$ les composantes irréductibles de $A_f = f^{-1}(0)$. On considère $u = \log|f|$. Si $\operatorname{codim} A_f = \min_j \operatorname{codim} A_j \geq l$, alors $(dd^c u)^l$ est bien défini.

Lorsque l'on travaille avec les applications holomorphes f telles que $\operatorname{codim} A_f = p$, il est commode de considérer les *chaînes holomorphes* qui leur correspondent, c'est-à-dire les courants

$$Z_f = \sum_j m_j [A_j],$$

où l'on se limite dans la somme seulement aux les composantes irréductibles A_j de codimension p du sous-ensemble analytique fermé A_f et où l'entier $m_j \in \mathbb{Z}_+$ figurent la multiplicité générique de f le long de A_j (c'est-à-dire aussi le nombre de Lelong générique du courant $(dd^c \log|f|)^p$ le long de A_j, on expliquera un peu plus loin pourquoi il s'agit de la même chose).

Le résultat suivant (d'abord établi par King dans le cas $q = p \leq n$, voir [GK73], et ensuite étendu par Demailly [D87], [Dbook] pour le cas général) permet de repésenter les chaînes holomorphes comme les contributions singulières dans la décomposition de Siu de courants de Monge-Ampère.

Théorème 4.8.1 (la formule de King–Demailly) *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}^q$ une application holomorphe, telle que l'on ait $\operatorname{codim} A_f = p$. Alors, pour $\ell < p$, les courants $(dd^c \log|f|)^l$ et $\log|f|(dd^c \log|f|)^l$ sont à coefficients localement intégrables et*

$$(dd^c \log|f|)^p = Z_f + R, \tag{4.8.5}$$

où Z_f est la chaîne analytique correspondant à f et $R \in \mathcal{D}^+_{n-p}(\Omega)$ est tel que $\chi_{A_f} R = 0$ et que les sous-ensembles analytiques fermés $E_c(R)$, $c > 0$, sont de codimension au moins égale à $p+1$.

Preuve. Pour $l < p$, les courants $(dd^c \log|f|)^l$ et $\log|f|(dd^c \log|f|)^l$ sont bien définis sur Ω et leurs restrictions à $\Omega \setminus A_f$ sont à coefficients C^∞ ; comme $\dim A_f < n - l$, ils ne peuvent charger A_f. Par la formule de Siu (Théorème 4.7.3),

$$(dd^c \log|f|)^p = \sum_j \lambda_j [A_j] + R,$$

où $\lambda_j > 0$ est le nombre de Lelong générique de $(dd^c \log|f|)^p$ le long de A_j. Nous allons montrer bientôt que ce nombre est aussi la multiplicité générique m_j de f le long de la composante irréductible A_j de A_f. $\square$

Exemples 4.8.2 Quelques cas particuliers :

1. Le cas $p = q = 1$: aucune condition sur les A_j n'est dans ce cas requise, $R = 0$, et l'on a donc l'*équation de Lelong-Poincaré*

$$dd^c \log |f| = Z_f.$$

2. Le cas $p = q \leq n$: $R = 0$ car dans ce cas la restriction de $\log |f|$ à tout sous-espace de dimension p est une fonction maximale psh sur $L \setminus A_f$ et par conséquent $(dd^c \log |f|)^p = 0$ hors de A_f. Cela donne la *formule de King* [GK73]

$$(dd^c \log |f|)^q = \sum_j m_j [A_j] = Z_f.$$

4.9 Nombres de Lelong et multiplicités

Nous avons vu que le nombre de Lelong de $dd^c \log |f|$ pour une fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ en un point $x \in \Omega$ vaut la multiplicité du zéro de f en x, et est dans ce cas l'ordre d'annulation de f en x (le degré minimal des moômes dans le développement de Taylor de f au voisinage de x). Pour les applications holomorphes à valeurs dans $\mathbb{C}^q$, la multiplicité en un point est définie de manière différente.

Dans la situation la plus simple, celle où $q = p = n$ (p désignant la codimension de l'ensemble A_f des zéros de f au point x), f se présente comme un revêtement fini d'un voisinage U_0 de 0 par un voisinage V_x de x et la multiplicité de f en x est juste le nombre de feuillets comme multiplicité d'une application équidimensionnelle. En d'autres termes, il s'agit du nombre générique de solutions $y \in V_x$ à l'équation $f(y) = a$, $a \in \mathbb{B}_\epsilon$.

Lorsque $q > n$ et que la codimension p de f en x est égale à n, la multiplicité de f en x est celle de l'application $f' : \Omega \to \mathbb{C}^n$ dont les composantes sont des combinaisons linéaires génériques des composantes de f.

Lorsque $p < n$, on considère les restrictions de l'application f aux sous-espaces de dimension p génériques passant par x et on définit la multiplicité en x de f comme la multiplicité en x de la restriction à un tel sous-espace p-dimensionnel générique.

Théorème 4.9.1 *Si la codimension de l'ensemble des zéros A_f de f en x vautp, alors $\nu((dd^c \log |f|)^p, x)$ égale la multiplicité de f en x.*

Preuve. Ceci se vérifie aisément dans le cas où $f : \mathbb{C}^n_0 \to \mathbb{C}^n_0$ et $p = n$, c'est-à-dire le cas où x est un point isolé de $f^{-1}(0)$. Soit s le nombre de feuillets du recouvrement. Alors

$$\nu((dd^c \log|f|)^n, x) = \nu([V_x], \log|f|) = \nu(f_*[V_x], 0) = s\,\nu([U_0], 0) = s.$$

La réduction du cas général à ce cas particulier est un peu technique et nous en omettrons les détails. □

On note aussi que A_f est l'intersection des ensembles des zéros A_{f_k} des composantes f_k de f. À cette observation correspond dans le cas $p = q \le n$ une représentation de la chaîne holomorphe Z_f comme produit d'intersection des diviseurs des composantes f_k de l'application f. Posons $u_k = \log|f_k|$.

Théorème 4.9.2 *Si les lieux de zéros A_{f_k} satisfont les conditions*

$$\dim A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_m} \le n - m$$

pour tous les m-uplets $(j_1, \ldots, j_m)$ avec $m \le q$, alors

$$dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q = Z_f.$$

Preuve. Suivant l'équation de Lelong-Poincaré, $dd^c u_k = Z_{f_k}$, et donc

$$dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q = Z_{f_1} \wedge \ldots \wedge Z_{f_q}.$$

Ce courant étant supporté par A_f, il est de la forme $\sum_j \alpha_j [A_j]$, où les A_j sont les composantes irréductibles A_f (toutes de dimension $n - q$) et $\alpha_j > 0$ est la multiplicité d'intersection de $Z_{f_1}, \ldots, Z_{f_q}$ le long de A_j (on prouve ceci par récurrence sur q). Comme on le sait en théorie de l'intersection, α_j est précisément la multiplicité générique de l'application holomorphe f le long de A_j. □

5 Évaluation des masses résiduelles de Monge-Ampère

Calculer les nombres de Lelong de fonctions psh est une tâche relativement facile, tandis que le calcul des nombres de Lelong des courants de Monge-Ampère $(dd^c u)^n$ s'avère, lui, beaucoup plus compliqué. Même dans le cas où

$u = \log|f|$, où f est une application holomorphe à valeurs dans $\mathbb{C}^q$ (ce qui revient dans ce cas au calcul des multiplicités d'applications holomorphes), il n'existe en général pas de formule disponible et il faut se contenter d'« estimations » qui peuvent devenir des égalités seulement sous des hypothèses de généricité.

Il n'est pas possible de trouver une estimation supérieure pour la masse résiduelle $\nu((dd^c u)^m, x)$ en termes de $\nu(u, x)$. Néanmoins, on ne sait pas, semble-t-il, s'il existe une fonction psh de nombre de Lelong nul en un point x, mais pourtant de masse résiduelle de Monge-Ampère non nulle en ce point.

Pour ce qui est des estimations inférieures, une estimation standard (conséquence du théorème de comparaison de Demailly) est

$$\nu((dd^c u)^m, x) \geq [\nu(u, x)]^m,$$

ce qui est loin d'être une égalité à moins que $u(z)$ ne soit essentiellement $c \log|z-x|$. Des relations plus précises peuvent être obtenues si l'on utilise des caractéristiques plus fines du comportement local des fonctions au voisinage de leurs singularités, par exemple les nombres de Lelong directionnels. On obtient ainsi en particulier des relations sur les multiplicités en termes des *polyèdres de Newton* des composantes des applications holomorphes.

Cette section est basée sur [LeR99] et [R00]. Pour une présentation agréable de l'opérateur de Monge-Ampère réel, voir [RaT77]. Les théorèmes de Kushnirenko-Bernstein sont présentés dans [AYu79], [Ku76].

5.1 Réduction aux indicatrices locales

On prendra ici $x = 0$ et on considèrera les nombres de Lelong au sens classique en ce point des courants de Monge-Ampère $(dd^c u)^m$ ainsi que des courants de Monge-Ampère mixtes $dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q$. Un outil de base sera une fois encore le théorème de comparaison de Demailly, qui implique le résultat suivant : *supposons les courants de Monge-Ampère $dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q$ et $dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_q$ avec $2 \leq q \leq n$ bien définis et*

$$\limsup_{z \to 0} \frac{u_k(z)}{v_k(z)} = l_k < \infty \;\; 1 \leq k \leq q;$$

alors

$$\nu(dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q, 0) \leq l_1 \ldots l_q \, \nu(dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_q, 0). \tag{5.1.1}$$

Du fait que $u_k(z) \leq \nu(u_k, 0) \log |z| + O(1)$, on en déduit

$$\nu(dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q, 0) \leq \nu(u_1, 0) \ldots \nu(u_q, 0). \tag{5.1.2}$$

Pour disposer d'une borne plus précise, choisissons $v_k = \Psi_{u_k}$, indicatrice de u_k en 0. On rappelle que l'indicatrice Ψ_u de $u \in \mathrm{PSH}_0$ est une fonction psh torique dans le disque unité, définie comme

$$\Psi_u(z) := \psi_u(\log |z_1|, \ldots, \log |z_n|),$$

où $\psi_u(s) = -\nu(u, 0, -s)$, $s \in \mathbb{R}^n_-$, et $\nu(u, 0, a)$ sont les nombres de Lelong directionnels.

Comme $u \leq \Psi_u + C$ au voisinage de l'origine, (5.1.1) implique le :

Théorème 5.1.1 *Si $dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q$ est bien défini au voisinage de l'origine, alors*

$$\nu(dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q, 0) \geq \nu(dd^c \Psi_{u_1} \wedge \ldots \wedge dd^c \Psi_{u_q}, 0).$$

Pour $u \in L^\infty_{loc}(\Omega \setminus \{0\})$, l'opérateur $(dd^c u)^n$ est bien défini, et le nombre

$$\mathcal{R}_u := \nu((dd^c u)^n, 0)$$

est la *mesure résiduelle* de $(dd^c u)^n$ en 0. Dans pareille situation, Ψ_u est une fonction psh maximale dans $\mathbb{D}^n \setminus \{0\}$ et ainsi, du fait du Théorème 2.3.1, $(dd^c \Psi_u)^n = 0$ dans $D \setminus \{0\}$. Il en résulte

$$(dd^c \Psi_u)^n = N_u \, \delta_0$$

avec

$$N_u = \mathcal{R}_{\Psi_u}$$

qui est appelé *nombre de Newton* de u en 0 (cette terminologie sera justifiée bientôt).

Corollaire 5.1.2 *Si $u \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega \setminus \{0\})$, alors $\mathcal{R}_u \geq N_u$.*

Plus généralement, soit $\{u\}$ un n-uplet de fonctions psh $u_1, ..., u_n$ dans Ω. Si le courant de Monge-Ampère $dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_n$ est bien défini au voisinage de 0, alors sa masse résiduelle en 0

$$\mathcal{R}_{\{u\}} := (dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_n)(0)$$

est minorée par

$$\mathcal{R}_{\{u\}} \geq N_{\{u\}},$$

où

$$N_{\{u\}} = \mathcal{R}_{\{\Psi_u\}} = (dd^c \Psi_{u_1} \wedge \ldots \wedge dd^c \Psi_{u_n})(0).$$

Pour faire entrer tout ceci dans des raisonnements, il convient donc de chercher de bonnes estimations pour les nombres de Newton.

5.2 Interprétation géométrique : volumes

Des estimations plus fines peuvent être déduites de calculs précis des masses résiduelles de Monge-Ampère des fonctions indicatrices en jeu. Ceci se fait en se plaçant dans le cadre de l'opérateur de Monge-Ampère réel.

Définition 5.2.1 Soit U une fonction psh *torique* dans le polydisque unité, c'est-à-dire $U(z) = U(|z_1|, \ldots, |z_n|) \in PSH(\mathbb{D}^n)$. Alors la fonction

$$h(t) := U(\exp(t_1), \ldots, \exp(t_n)), \quad t \in \mathbb{R}^n_-,$$

est convexe en t et croissante en chaque t_k. C'est l'*image convexe* de U.

Supposons de plus que $u \in L^\infty(\mathbb{D}^n)$. Des calculs élémentaires montrent que

$$(dd^c U)^n = n!(2\pi)^{-n} \mathcal{MA}_{\mathbb{R}}[h]\, d\theta, \quad z_k = \exp\{t_j + i\theta_j\},$$

où $\mathcal{MA}_{\mathbb{R}}$ est l'*opérateur de Monge-Ampère réel*[4]. Si h est de classe C^2

$$\mathcal{MA}_{\mathbb{R}}[h] = \det\left(\frac{\partial^2 h}{\partial t_j \partial t_k}\right) dt,$$

et cette définition s'étend, au sens operateur à valeurs mesures, à toute fonction convexe h. De plus,

$$\mathcal{MA}_{\mathbb{R}}[h](F) = \mathrm{Vol}(G_h(F)) \qquad (5.2.3)$$

pour tout borélien $F \subset\subset \mathbb{R}^n_-$, où

$$G_h(F) = \bigcup_{t^0 \in F} \{a \in \mathbb{R}^n : h(t) \geq h(t^0) + \langle a, t - t^0 \rangle \ \forall t \in \mathbb{R}^n_-\}$$

est le *gradient image* de F pour la surface $\xi = h(t)$.

Terminologie et preuve viennent ici du cadre des fonctions convexes lisses où $\mathcal{MA}_{\mathbb{R}}[h]$ vaut le déterminant jacobien $J_{\nabla h}$ de l'application gradient ∇h, $G_h(F) = \nabla h(F)$, et l'équation (5.2.3) est juste la formule de changement de variables.

4. Pour un panorama complet de l'opérateur de Monge-Ampère réel, voir [RaT77].

Ainsi, pour tout sous-ensemble borélien, n-cerclé (ou encore torique, ou bien Reinhardt) $E \subset\subset \mathbb{D}^n$ et son *image logarithmique*

$$\log E = \{t \in \mathbb{R}^n_- : (\exp t_1, \dots, \exp t_n) \in E\},$$

on a

$$(dd^c U)^n(E) = n! \operatorname{Vol} G_h(\log E).$$

Définition 5.2.2 *On dit que* $\Psi \in \mathrm{PSH}_-(\mathbb{D}^n)$ est une *indicatrice (virtuelle)* si Ψ est une fonction torique dont l'image convexe

$$\psi(t) := \Psi(\exp(t_1), \dots, \exp(t_n))$$

est positive homogène, c'est-à-dire vérifie $\psi(ct) = c\psi(t)$ pour tout $c > 0$.

En d'autres termes, ψ est restriction à $\mathbb{R}^n_-$ de la fonction support d'un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n_+$:

$$\psi(t) = \sup\{\langle a, t\rangle : a \in \Gamma_\Psi\},\ t \in \mathbb{R}^n_-,$$

où

$$\Gamma_\Psi = \{a \in \mathbb{R}^n_+ : \langle a, t\rangle \le \psi(t)\ \forall t \in \mathbb{R}^n_-\}. \tag{5.2.4}$$

On note, étant donnée une telle indicatrice Ψ, $U = \max\{\Psi, -1\}$. Alors le courant $(dd^c U)^n$ est supporté par $E_\Psi = \{z : \Psi(z) = -1\}$, et l'on a

$$G_h(\log E_\Psi) = \mathbb{R}^n_+ \setminus \Gamma_\Psi.$$

De plus, si $\Psi \in L^\infty_{loc}(\mathbb{D}^n \setminus \{0\})$, alors

$$(dd^c U)^n(\mathbb{D}^n) = (dd^c \Psi)^n(\mathbb{D}^n) = \mathcal{R}_\Psi.$$

Pour tout sous-ensemble convexe Γ de $\mathbb{R}^n_+$ qui de plus est *complet* au sens où $\Gamma + \mathbb{R}^n_+ \subset \Gamma$, on appelle

$$\operatorname{Covol}(\Gamma) = \operatorname{Vol}(\mathbb{R}^n_+ \setminus \Gamma),$$

le *covolume* of Γ. On a alors la :

Proposition 5.2.3 *La masse résiduelle de Monge-Ampère d'une fonction indicatrice (virtuelle)* $\Psi \in L^\infty_{loc}(\mathbb{D}^n \setminus \{0\})$ *est*

$$\mathcal{R}_\Psi = n! \operatorname{Covol}(\Gamma_\Psi),$$

où Γ_Ψ *est défini en (5.2.4).*

Quand $\Psi = \Psi_u$, on a

$$\Gamma_\Psi = \Gamma_u := \{a \in \mathbb{R}^n_+ : \nu(u, 0, a) \leq \langle a, b \rangle \ \forall b \in \mathbb{R}^n_+\}. \tag{5.2.5}$$

Alors le Corollaire 5.1.2 nous donne le :

Théorème 5.2.4 *Si u a une singularité isolée en 0, alors*

$$\mathcal{R}_u \geq N_u = n! \operatorname{Covol}(\Gamma_u). \tag{5.2.6}$$

Pour calculer la masse résiduelle de l'opérateur de Monge-Ampère cette fois mixte d'indicatrices, on considère l'(unique) forme (dite polarisation de Covol)

$$\operatorname{Covol}(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$$

sur les n-uplets de sous-ensembles convexes complets $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ de $\mathbb{R}^n_+$ qui soit multilinéaire par rapport à l'addition de Minkowski et telle que pour tout convexe complet Γ de covolume fini, on ait $\operatorname{Covol}(\Gamma, \ldots, \Gamma) = \operatorname{Covol}(\Gamma)$. On peut montrer qu'une telle forme polarisée est bien définie sur les n-uplets $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ de convexes complets dont l'union $\cup_j \Gamma_j$ a un covolume fini.

Théorème 5.2.5 *Soit $\{u\} = u_1, \ldots, u_n$. Si $dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_n$ est bien défini, alors*

$$\mathcal{R}_{\{u\}} \geq n! \operatorname{Covol}(\Gamma_{u_1}, \ldots, \Gamma_{u_n}).$$

On observe que si $u = \log |z|$, alors $\Gamma_u = \Delta^c := \{a \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_k a_k \geq 1\}$, c'est-à-dire le complémentaire du simplexe standard. Il en résulte que dans le cas où $\{u\} = u_1, \ldots, u_q$ est un q-uplet avec $1 \leq q < n$, tel que le courant de Monge-Ampère $dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q$ soit bien défini, on a la minoration

$$\mathcal{R}_{\{u\}} \geq n! \operatorname{Covol}(\Gamma_{u_1}, \ldots, \Gamma_{u_q}, \Delta^c, \ldots, \Delta^c).$$

5.3 Application au cadre des applications holomorphes : polyèdres de Newton

Pour une fonction $u = \log |f|$ associée à une application holomorphe $f : \mathbb{C}^n_0 \to \mathbb{C}^q_0$ $(q \geq n)$ présentant un zéro isolé en 0 la masse résiduelle de Monge-Ampère $\mathcal{R}_u$ de $(dd^c u)^n$ en 0 est la multiplicité m_f de f à l'origine.

Quand $q = n$ et que les ensembles des zéros des composantes de f s'intersectent proprement, l'inégalité (5.1.2) nous donne la minoration

$$m_f \geq m_{f_1} \dots m_{f_n}$$

faisant intervenir les multiplicités en 0 des diveres composantes de l'application f, ce qui constitue *une variante locale du théorème de Bézout*.

Comme on l'a vu dans (1.6.12), l'indicatrice de $u = \log|f|$ (attachée à une application holomorphe f) se calcule comme

$$\Psi_u(z) = \sup\left\{\log|z^J| : J \in \omega_0\right\},$$

où $\omega_0 \subset \mathbb{Z}_+^n$ est la collection des multi-indices J tels que z^J est affecté d'un coefficient non nul dans le développement de Taylor au voisinage de l'origine d'au moins une des composantes f_j de f. Par conséquent, son image convexe ψ_u se représente comme

$$\psi_u(t) = \sup\{\langle t, J\rangle : \ J \in \omega_0\}.$$

Ceci signifie que le sous-ensemble Γ_u (5.2.5) est l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble ω_0, que l'on connaît comme le *polyèdre de Newton* pour l'application f en 0. Ainsi, comme cas particulier du Théorème 5.2.4, on retrouve la minoration

$$m_f \geq n!\,\mathrm{Covol}(\Gamma_f)$$

obtenue dans le cas $q = n$ par Kushhnirenko (1975) en faisant appel à des techniques à la fois analytiques et algébriques. La spécification correspondante du Théorème 5.2.5 donne un résultat du type Kushnirenko-Bernstein.

On note que pour les applications holomorphes f à valeurs dans $\mathbb{C}^q$ avec $q < n$ et ensemble de zéros de codimension q, le Théorème 5.2.5 fournit la minoration

$$m_f \geq n!\,\mathrm{Covol}(\Gamma_{u_1}, \dots, \Gamma_{u_q}, \Delta^c, \dots, \Delta^c),$$

où $u_j = \log|f_j|$, les sous-ensembles Γ_{u_j} sont les polyèdres de Newton des fonctions f_j en 0, et $\Delta^c = \{a \in \mathbb{R}_+^n : \sum_k a_k \geq 1\}$.

Ainsi, les méthodes de la théorie relevant du pluripotentiel se révèlent assez puissantes pour produire, de manière à la fois simple et unifiée, des estimations efficaces pour les multiplicités des applications holomorphes.

6 Questions ouvertes

On donne une liste de juste quelques problèmes ouverts relatifs aux sigularités psh.

Si $u \in \mathrm{PSH}_x$ a en x une singularité isolée, alors $(dd^c u)^n(x) \geq [\nu(u,x)]^n$, tandis qu'aucune inégalité dans l'autre sens n'est envisageable. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre $u = \max\{k \log|z_1|, \log|z_2|\}$, $k > 0$, avec alors $\nu(u,0) = 1$ tandis que $(dd^c u)^n(0) = k$.

Question 1 (*Le Problème de l'annulation du nombre de Lelong* [V. Guedj, A. Rashkovskii, 1999]) : *L'implication*

$$(P1) \qquad \nu(u,x) = 0 \ \Rightarrow \ (dd^c u)^n(x) = 0$$

est-elle valide à partir du moment où $(dd^c u)^n$ est bien défini (par exemple, si u est localement bornée en dehors de x) ? (il s'agit de la question 7 dans [DiGuZe16]).

Ceci est vrai (grâce au théorème de comparaison de Demailly) lorsque u est ainsi minorée :

$$u(x) \geq c \log|z - x| + O(1) \tag{6.0.1}$$

for some $c > 0$. Du fait de l'inégalité de Łojasiewicz, toute application holomorphe f présentant un zéro isolé en x satisfait

$$|f(z)| \geq |z - x|^\gamma$$

pour au moins un $\gamma > 0$. Ainsi les fonctions psh à singularités analytiques se plient à la minoration (6.0.1).

On peut montrer que si u est une fonction psh localement bornée hors de x, il existe une fonction psh v maximale hors de x et telle que $\nu(v,x) = \nu(u,x)$, $(dd^c v)^n(x) = (dd^c u)^n(x)$.

Question 2 : Existe-t-il $v \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega \setminus \{x\})$, maximale dans $\Omega \setminus \{x\}$ et telle que

$$\limsup_{z \to x} \frac{u(z)}{\log|z - x|} = \infty?$$

On peut envisager la question 1 en approchant u par des fonctions u_m à singularités analytiques (suivant l'approximation de Demailly, Théorème 4.3.2) pour lesquelles l'assertion (P1) est vraie. On sait effectivement que $\nu(u_m, x) \to \nu(u, x)$, mais par contre il n'est pas clair que les masses résiduelles de Monge-Ampère des u_m en x convergent vers celle de u en ce point.

Question 3 (Demailly) : *Est-il vrai que* $(dd^c u_m)^n(x) \to (dd^c u)^n(x)$ *?*

On trouvera plus d'informations en relation avec ces questions dans [R16]. D'autres problèmes ouverts relatifs aux singularités psh et à des sujets afférents (incluant les fonctions *quasi-psh*) sont présentés dans [DiGuZe16].

Références

[AYu79] L.A. Aizenberg and Yu.P. Yuzhakov, Integral Representations and Residues in Multidimensional Complex Analysis. Nauka, Novosibirsk, 1979. English transl. : AMS, Providence, R.I., 1983.

[B93] E. Bedford, *Survey of pluri-potential theory.* In : Several Complex Variables. Proceedings of the Mittag-Leffler Institute 1987-1988 (Ed. : J.E. Fornaess), 48–97. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1993.

[BłLN1] Z. Błocki, *The complex Monge-Ampère operator in pluripotential theory, Lecture notes.* Available at `http://gamma.im.uj.edu.pl/~blocki/publ/ln/wykl.pdf`

[BłLN2] Z. Błocki, *Several Complex Variables, PhD course, UAM, Fall 2014.* Available at `http://gamma.im.uj.edu.pl/~blocki/publ/ln/scv-poznan.pdf`

[BoFJ08] S. Boucksom, C. Favre, and M. Jonsson, *Valuations and plurisubharmonic singularities*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **44** (2008), no. 2, 449–494.

[D85] J.-P. Demailly, *Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines*, Mém. Soc. Math. France (N. S.) **19** (1985), 1–124.

[D87] J.P. Demailly, *Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'intégralité et d'analycité,* Acta Math. **159** (1987), 153–169.

[D92] J.P. Demailly, *Regularization of closed positive currents and intersection theory*, J. Algebraic Geometry **1** (1992), 361–409.

[D93] J.P. Demailly, *Monge-Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory,* Complex Analysis and Geometry (Univ. Series in Math.), ed. by V. Ancona and A. Silva, Plenum Press, New York 1993, 115–193. Available as Chapter III of [Dbook].

[Dbook] J.P. Demailly, Complex Analytic and Differential Geometry. Available at `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html`

[DK01] J.P. Demailly and J. Kollár, *Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler-Einstein metrics on Fano orbifolds*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **34** (2001), no. 4, 525–556.

[DiGuZe16] S. Dinew, V. Guedj, A. Zeriahi, Open problems in pluripotential theory, Complex Var. Elliptic Equ. (2016) ; available at arXiv :1511.00705.

[EM] H. El Mir, *Sur le prolongement des courants positifs fermés*, Acta Math. **153** (1984), 1-45.

[F99] C. Favre, *Note on pull-back and Lelong numbers of currents*, Bull. Soc. Math. France **127** (1999), 445–458.

[Fo] J.E. Fornaess, *Several Complex Variables. Course for talented undergraduates.* Beijing University, Spring Semester 2014. ArXiv :1507.00562.

[GK73] P.A. Griffiths and J. King, *Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties*, Acta Math. **130** (1973), 145–220.

[GuaZh15] Qi'an Guan and Xiangyu Zhou, *A proof of Demailly's strong openness conjecture*, Ann. of Math. (2) **182** (2015), no. 2, 605–616.

[GuZe17] V. Guedj and A. Zeriahi, Degenerate complex Monge-Ampère equations. EMS Tracts in Mathematics, 26. Zrich, 2017.

[Hi14] Pham Hoang Hiep, *The weighted log canonical threshold*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **352** (2014), no. 4, 283–288.

[H94] L. Hörmander, Notions of Convexity. Progress in Mathematics, Birkhäuser 127, 1994.

[K78] C.O. Kiselman, *Partial Legendre transform for plurisubharmonic functions*, Invent. math. **49** (1978), 137–148.

[K87] C.O. Kiselman, *Un nombre de Lelong raffiné*, In : Séminaire d'Analyse Complexe et Géométrie 1985-87, Fac. Sci. Monastir Tunisie 1987, 61–70.

[K94] C.O. Kiselman, *Attenuating the singularities of plurisubharmonic functions*, Ann. Polon. Math. **LX.2** (1994), 173–197.

[K00a] C.O. Kiselman, *Plurisubharmonic functions and potential theory in several complex variables*, In : Development of mathematics 1950–2000. Birkhäuser, Basel, 2000, 655–714.

[K00b] C.O. Kiselman, *Ensembles de sous-niveau et images inverses des fonctions plurisubharmoniques*, Bull. Sci. Math. **124** (2000), 75–92.

[Kl91] M. Klimek, Pluripotential theory. Oxford University Press, London, 1991.

[Ko98] S. Kolodziej, *The complex Monge-Ampère equation*, Acta Math. **180** (1998), 69–117.

[Ku76] A.G. Kouchnirenko, *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*, Invent. Math. **32** (1976), 1–31.

[Le42] P. Lelong, *Définition des fonctions plurisousharmoniques*, C. R. Acd. Sci. Paris **215** (1942), 398–400.

[Le57] P. Lelong, *Intégration sur un ensemble analytique complexe*, Bull. Soc. Math. France. **85** (1957), 239–262.

[Le69] P. Lelong, Plurisubharmonic functions and positive differential forms, Gordon and Breach, New York, and Dunod, Paris, 1969.

[Le94] P. Lelong, *Quelques remarques sur la recherche et la création des objets souples en analyse mathématique*, In : Les grands systèmes des sciences et de la technologie, 461–475. RMA Res. Notes Appl. Math., 28, Masson, Paris, 1994.

[Le95] P. Lelong, *D'une variable à plusieurs variables en analyse complexe : les fonctions plurisousharmoniques et la positivité (1942–1962)*, Rev. Histoire Math. **1** (1995), no. 1, 139–157.

[Le98] P. Lelong, Positivity in complex spaces and plurisubharmonic functions. Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, vol. 112, Kingston/Ontario, 1998.

[LeGr86] P. Lelong and L. Gruman, Entire Functions of Several Complex Variables. Springer, 1986.

[LeR99] P. Lelong and A. Rashkovskii, *Local indicators for plurisubharmonic functions*, J. Math. Pures Appl. **78** (1999), 233–247.

[OT87] T. Ohsawa and K. Takegoshi, *On the extension of L^2 holomorphic functions*, Math. Z. **195** (1987), 197–204.

[R00] A. Rashkovskii, *Newton numbers and residual measures of plurisubharmonic functions*, Ann. Polon. Math. **75** (2000), no. 3, 213–231.

[R01] A. Rashkovskii, *Lelong numbers with respect to regular plurisubharmonic weights*, Results Math. **39** (2001), 320–332.

[R06] A. Rashkovskii, *Relative types and extremal problems for plurisubharmonic functions*. Int. Math. Res. Not., 2006, Art. ID 76283, 26 pp.

[R09] A. Rashkovskii, *Analyticity and propagation of plurisubharmonic singularities*, Functional analysis and complex analysis, 137–143, Contemp. Math., 481, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[R13] A. Rashkovskii, *Analytic approximations of plurisubharmonic singularities*, Math. Z. **275** (2013), no. 3-4, 1217–1238.

[R16] A. Rashkovskii, *Some problems on plurisubharmonic singularities*, Mat. Stud. **45** (2016), no. 1, 104–108. Available at arXiv :1611.02470.

[RaT77] J. Rauch and B. A. Taylor, *The Dirichlet problem for the multidimensional Monge-Ampère equation,* Rocky Mountain Math. J. **7** (1977), 345–364.

[S74] Y.T. Siu, *Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents*, Invent. Math. **27** (1974), 53–156.

[Sk72] H. Skoda, *Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans* $\mathbb{C}^n$, Bull. Soc. Math. France **100** (1972), 353–408.

[SK82] H. Skoda, *Prolongement des courants, positifs, fermés de masse finie*, Invent. Math. **66** (1982), no. 3, 361-376.

[Th67] P. Thie, *The Lelong number of a point of a complex analytic set*, Math. Ann. **172** (1967), 269–312.

Tek/Nat, University of Stavanger, 4036 Stavanger, Norway

E-mail : alexander.rashkovskii@uis.no