

Amibes des variétés complexes et leurs applications

August Tsikh

2017

§1. La notion d'amibe et comment elle est née

§1.1. Définitions de l'amibe et de la coamibe

La notion d'amibe est apparue à la fin du XX^e siècle aux fins de « visualiser » une surface complexe. On trouve pour la première fois la définition de l'*amibe d'une hypersurface algébrique* dès 1994 dans le célèbre traité de Gelfand-Krapanov-Zelevinski [12]; il est apparu très tôt que ce concept s'avère être fondamental. Il a joué un rôle significatif dans le développement de la géométrie tropicale et trouvé nombre d'applications importantes en théorie asymptotique, en thermodynamique, en théorie des dimères et en biologie computationnelle.

Il est hautement surprenant que le caractère fondamental de ce concept l'a fait apparaître dans des travaux antérieurs, par exemple en relation avec les développements de Laurent des fonctions rationnelles ou lors de la description des « positions limites » des ensembles algébriques [5], 1973). Il est apparu ensuite que la théorie des amibes constitue un outil effectif pour l'étude de la distributions des zéros des polynômes en plusieurs variables, du fait que le comportement de la « fonction de décompte » donnée par l'intégrale de Jensen-Ronkin pour un polynôme est donnée essentiellement par la structure de l'amibe de l'hypersurface des zéros de ce polynôme.

Retournons d'abord à la visualisation des surfaces complexes. Le premier pas dans cette direction remonte à Reinhardt qui proposa de considérer la

surface 2-dimensionnelle (complexe) \mathbb{C}^2 en termes des « coordonnées absolues » $|z_1|, |z_2|$. En ces coordonnées, l'espace \mathbb{C}^2 en quatre variables réelles est figuré comme un quadrant du plan, dit *diagramme de Reinhardt*, voir la figure 1.1.

Prenons comme exemple la description de la droite complexe $1 + z_1 + z_2 = 0$ sur le diagramme de Reinhardt. Si l'on exprime les inégalités du triangle pour chaque paire de nombres complexes pris dans la liste $\{1, z_1, z_2\}$ lorsque $1 + z_1 + z_2 = 0$, on trouve :

$$|z_2| = |1 + z_1| \leq 1 + |z_1|, \quad |z_1| = |1 + z_2| \leq 1 + |z_2|, \quad 1 = |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Il en résulte que les valeurs absolues $r_j = |z_j|$ des coordonnées des points (z_1, z_2) appartenant à notre droite satisfont le système d'inégalités :

$$1 + r_1 \geq r_2, \quad 1 + r_2 \geq r_1, \quad r_1 + r_2 \geq 1.$$

Ce système définit un rectangle non borné comme sur la figure 1.2. Pour chaque point (r_1, r_2) de ce rectangle, on peut trouver un triangle dont les longueurs des côtés valent respectivement $1, r_1, r_2$ (voir la figure 1.2). Plaçons ce triangle dans le plan complexe \mathbb{C}_t (la variable complexe y est notée t) de manière à ce que il ait $t = 0$ et $t = 1$ parmi ses trois sommets. Si (r_1, r_2) est un point intérieur au rectangle, il y a deux tels triangles (voir la figure 1.3.). Il est maintenant clair quels sont les points de la droite complexes se projetant en (r_1, r_2) : ce sont le vecteur (z_1, z_2) et son conjugué (\bar{z}_1, \bar{z}_2) tels qu'ils sont représentés sur la figure 1.4.

Ainsi donc une droite complexe se projette sur le diagramme de Reinhardt comme un rectangle non borné (voir la figure 1.2.). Chaque point intérieur de ce rectangle est image de deux points $(z_1, z_2), (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ de la droite (conjugués) tandis qu'un point de la frontière du rectangle est image d'un seul point à coordonnées réelles ; les deux conjugués ne font plus qu'un seul en ce point.

Après un passage à l'échelle logarithmique sur les axes

$$(r_1, r_2) \longrightarrow (\log r_1, \log r_2),$$

le rectangle devient une figure comme sur la figure 1.5, figure que l'on appelle « *amibe* » de la droite complexe. On a convenu de choisir le qualificatif *amibe* car lorsque C est une courbe complexe dans \mathbb{C}^2 d'équation $f(z_1, z_2) = 0$ (de degré grand) et que l'on considère sa projection par

$$(z_1, z_2) \rightarrow (\log |z_1|, \log |z_2|),$$

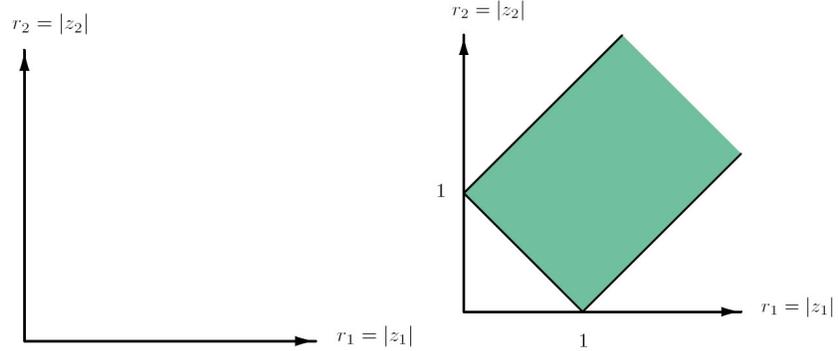


Fig. 1.1 : Le diagramme de Reinhardt ; Fig. 1.2 : une droite complexe projetée sur le diagramme de Reinhardt



Figures Fig. 1.3. et Fig. 1.4.



Fig. 1.5 : amibe d'une droite complexe.

l'image de l'hypersurface définie par f est une figure présentant des tentacules de resserant à l'infini, présentant (éventuellement) un nombre fini de « trous ». Ainsi l'amibe d'une courbe complexe se met à ressembler à une amibe biologique (voir la figure 1.6).

Un tel argument pour une courbe complexe nous conduit naturellement à introduire la définition de notre principal objet. On rappelle ici que les ensembles algébriques complexes sont décrits par des systèmes d'équations algébriques.

Définition 1.1. *On appelle amibe d'un ensemble algébrique $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ son image par la projection*

$$\text{Log} : (\mathbb{C} \setminus 0)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

donnée par

$$\text{Log} : (z_1, \dots, z_n) \rightarrow (\log |z_1|, \dots, \log |z_n|).$$

L'amibe de l'ensemble V est notée \mathcal{A}_V . Si V est une hypersurface donnée comme le lieu des zéros d'un polynôme $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$ on notera aussi l'amibe de V $\mathcal{A}_V = \mathcal{A}_f$.

On observe que le complémentaire dans \mathbb{R}^2 de l'amibe d'une droite complexe de \mathbb{C}^2 consiste en un nombre fini de composantes connexes, toutes ouvertes



Fig. 1.6. Amibe d'une courbe complexe dans \mathbb{C}^2

et convexes. En fait, cela reste vrai pour l'amibe de toute hypersurface $V = \{f(z) = 0\}$: le complémentaire dans $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ de l'amibe d'une hypersurface \mathcal{A}_f consiste en un nombre fini de composantes connexes, toutes ouvertes et convexes.

Le fait que le complémentaire de l'amibe soit ouvert (ou que l'amibe soit fermée) vient du fait que l'application Log est propre : la pré-image d'un point de \mathbb{R}^n est un tore réel n -dimensionnel de $(\mathbb{C}^*)^n$, qui est compact. Nous allons voir bientôt que chaque composante connexe u complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ est convexe.

Notons que les composantes connexes du complémentaire de l'image d'une hypersurface par projection sur le diagramme de Reinhardt ne sont pas nécessairement convexes, comme on le voit avec l'exemple suivant de l'hyperbole complexe

$$z_1 z_2 - 1 = 0.$$

La projection sur le domaine de Reinhardt est la branche d'hyperbole réelle $r_1 r_2 = 1$ et son complémentaire est constitué de deux composantes, celle qui se trouve au dessous de cette branche d'hyperbole n'est pas convexe.

Cependant, l'amibe de l'hyperbole est une droite du plan, son complémentaire est constitué de deux demi-plans ouverts, bien sûr convexes.

On note aussi que l'application Log impliquée dans la définition de l'amibe est la partie réelle du logarithme complexe

$$\text{Log}_{\text{Complex}}(z) := \text{Log}(z) + i\text{Arg}(z).$$

Ainsi, l'amibe de l'ensemble $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ est la projection (surjective) sur le sous-espace des parties réelles de l'image de V (exprimée dans l'échelle logarithmique). On pourrait tout aussi bien considérer la projection sur le \mathbb{R} -espace des parties imaginaires. De cela résulte la notion de *co-amibe* de V .

Définition 1.2. *La co-amibe d'un sous-ensemble algébrique $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ est l'image de V par l'application $\text{Arg} : (\mathbb{C} \setminus 0)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par*

$$\text{Arg} : (z_1, \dots, z_n) \rightarrow (\arg z_1, \dots, \arg z_n). \quad (1.1)$$

On notera la co-amibe de V par $\text{co-}\mathcal{A}_V$.

Exemple 1.1. Clarifions ici à quoi ressemble la co-amibe de la droite complexe $V = \{z_1 + z_2 + 1 = 0\}$ de $(\mathbb{C}^*)^2$. On voit aisément qu'un point $(z_1, z_2) = (r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2})$ (on suppose ici que $-\pi \leq \theta_j \leq \pi$, $j = 1, 2$) appartient à V si et seulement si

$$|\theta_1 - \theta_2| < \pi \text{ or } \theta = (\pm\pi, \pm\pi), (\pm\pi, 0), (0, \pm\pi).$$

Une fois réalisé les « collages » bord à bord de la frontière du quadrant $[-\pi, \pi]^2$, on obtient un tore réel bi-dimensionnel sur lequel la co-amibe de V consiste en deux triangles dont seulement trois points frontière appartiennent à $\text{co-}\mathcal{A}_V$.

§1.2. Amibes et séries de Laurent

On considèrera dans cette sous-section amibes et co-amibes d'hypersurfaces, ce qui signifie que V est donnée par une seule équation algébrique $f(z) = 0$. Dans les pré-images (via Log) des composantes connexes du complémentaire de l'amibe ou de la co-amibe, vit la fonction rationnelle $1/f$. Dans chacune de ces composantes connexes, cette fonction rationnelle $1/f$ admet des approximations naturelles en termes respectivement

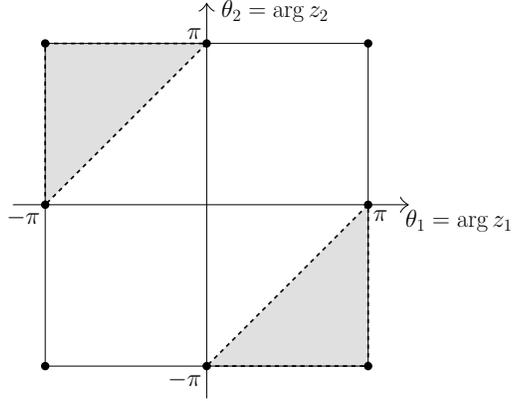


Fig. 1.7. Co-amibe de $z_1 + z_2 + 1$

- de séries de Laurent (en les puissances z^α de z , $\alpha \in \mathbb{Z}^n$;
- d'intégrales de Mellin.

La fonction rationnelle $1/f$ se développe en série de Laurent

$$\sigma = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha,$$

où les coefficients c_α , $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, sont donnés par les formules intégrales

$$c_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\text{Log}^{-1}(x)} \frac{1}{f(z)} z^{-\alpha} \frac{dz}{z}, \quad \text{avec } \frac{dz}{z} = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dz_n}{z_n}. \quad (1.2)$$

Ici $x = (x_1, \dots, x_n)$ doit être choisi dans le complémentaire de l'amibe et $\text{Log}^{-1}(x)$ est le n -cycle correspondant, convenablement orienté dans la variété $\mathbb{T}^n \setminus V$ ($\mathbb{T} = \mathbb{C}^*$) ; l'orientation que l'on convient toujours de prendre est celle pour laquelle $d \arg(z_1) \wedge \cdots \wedge d \arg(z_n) > 0$ sur $\text{Log}^{-1}(x)$. On observe ainsi que le coefficient c_α dépend seulement du choix de la composante connexe particulière de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ dans laquelle on a choisi le point x : en effet, si x et y sont dans une même composante connexe de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$, alors les deux n -cycles $\text{Log}^{-1}(x)$ et $\text{Log}^{-1}(y)$ sont clairement homologues dans $\mathbb{T}^n \setminus V$. On rappelle ici un résultat de [12]. Voir aussi [10] et [20].

Théorème 1.1. *Les composantes connexes du complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ de l'amibe d'une hypersurface sont convexes et sont de plus en correspondance*

bi-univoque avec les différentes séries de Laurent possibles (en les monômes z^α , donc centrées à l'origine) que l'on peut envisager (dans les domaines de convergence ad-hoc, en fait les images réciproques de ces composantes connexes), pour la fonction rationnelle $1/f$.

La convexité des composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ résulte d'un fait général : les domaines de convergence des séries de Laurent centrées à l'origine sont exactement les ouverts de \mathbb{T}^n logarithmiquement convexes, c'est-à-dire les sous-ensembles de la forme $\text{Log}^{-1}(E)$, où E est un domaine convexe de \mathbb{R}^n .

L'intégrale (1.2) ci-dessus s'interprète comme le résultat d'une transformation de Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1}[1/f]$ sur le tore réel $\text{Log}^{-1}(x)$. En accord avec ce fait, la série σ joue le rôle de série de Fourier et $1/f$ se représente donc dans la composante connexe fixée comme $1/f = \mathcal{F} \mathcal{F}^{-1}[1/f]$.

§1.3. Co-amibes et transformées intégrales « en puissances » de Mellin

La fibre $\text{Arg}^{-1}(\theta)$ de l'application Arg définie en (1.1) est isomorphe à \mathbb{R}_+^n . Ainsi, en complète analogie avec la transformation de Fourier, on se doit de considérer une intégrale sur la fibre \mathbb{R}_+^n . De telles intégrales sont précisément fournies par la *transformation intégrale de Mellin* « en puissances »¹.

Ainsi, étant donné un point $\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \text{co-}\mathcal{A}_V$ (on suppose donc que θ appartient à l'une des composantes connexes F_ν of $\mathbb{R}^n \setminus \text{co-}\mathcal{A}_V$ d'intérieur non vide F_ν°), on peut considérer l'évaluation d'une certaine transformée de Mellin de $1/f$ en ζ comme

$$M[1/f](\zeta) = \int_{e^{i\theta} \cdot \mathbb{R}_+^n} \frac{1}{f(z)} z^\zeta \frac{dz}{z},$$

où $e^{i\theta} \cdot \mathbb{R}_+^n$ est un translaté par multiplication de $(\mathbb{R}^+)^n$, soit

$$e^{i\theta} \cdot \mathbb{R}_+^n := \{(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n}) \in \mathbb{C}^n : r \in \mathbb{R}_+^n\}.$$

Il résulte du théorème de I. Antipova [2] que l'on a

$$\frac{1}{f(z)} = M^{-1} M\left[\frac{1}{f}\right] = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{a+i\mathbb{R}^n} M\left[\frac{1}{f}\right](\zeta) z^{-\zeta} d\zeta, \quad z \in \text{Arg}^{-1}(F_\nu^\circ) \tag{1.3}$$

1. Terminologie ajoutée lors de l'exposé.

où

$$a \in U_\nu := \{u \in \mathbb{R}^n : 1/f(z) = O(z^{-u}) \text{ in } \text{Arg}^{-1}(F_\nu^\circ)\}.$$

Nous pouvons maintenant formuler en écho au Théorème 1.1 le résultat suivant. On note pour cela $T^n = [-\pi, \pi]^n / \sim$ le tore réel n -dimensionnel.

Théorème 1.2. *Soit V une hypersurface algébrique dans \mathbb{T}^n . Alors le complémentaire $T^n \setminus \text{co-}\mathcal{A}_V$ de la co-amibe de V dans T^n consiste en un nombre fini de composantes connexes $\{F_\nu\}$ telles que les ouverts F_ν° , lorsqu'ils sont non vides, sont convexes. La famille de tous les intérieurs non vides F_ν° de ces diverses composantes connexes est en correspondance bi-univoque avec les représentations possibles du type (1.3) de $1/f$ comme transformée intégrale de Mellin inverse (représentation alors valable dans l'ouvert $\text{Arg}^{-1}(F_\nu^\circ)$ de \mathbb{T}^n).*

Ce théorème résulte du théorème bien connu des « tubes de Bochner » : Si $g(w) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n + iU)$, $U \subset \mathbb{R}^n$, ce qui signifie que g est holomorphe dans un domaine « tubulaire », alors $g(w) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n + i(\text{enveloppe convexe de } U))$.

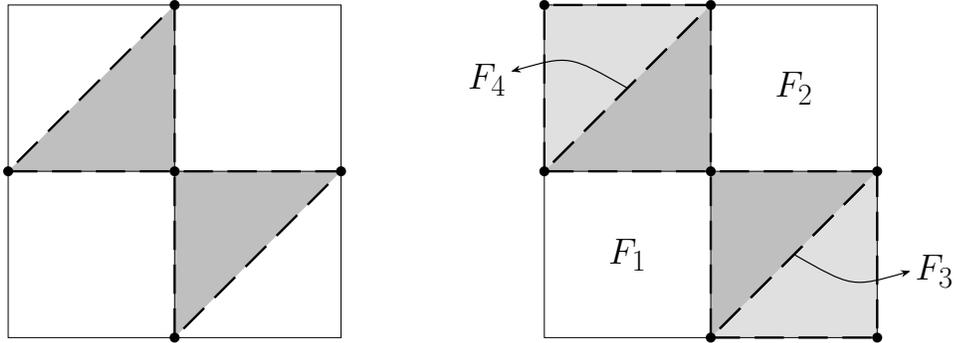
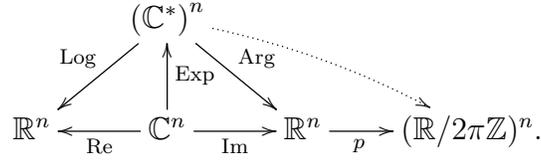


Fig. 1.8. : co-amibe pour $z_1 + z_2 - 1$; Fig. 1.9. : co-amibe pour le produit $(z_1 + z_2 - 1)(z_1 + z_2 + 1)$

Exemple 1.2. $f = (z_1 + z_2 + 1)(z_1 + z_2 - 1)$. Ici $T^2 \setminus \text{co-}\mathcal{A}_f$ consiste en quatre composantes connexes, dont deux (F_1 et F_2) ont des intérieurs non vides et deux (F_3 et F_4) sont des intervalles.

Pour récapituler, insistons sur le fait que la relation entre amibe et co-amibe passe pour sa réalisation par le diagramme suivant :



§1.4. Quelques questions ouvertes

Concluons cette première section en posant trois questions ouvertes.

1. Soit $V = \{f = 0\}$ une hypersurface algébrique de \mathbb{T}^n . Pour chaque composante connexe E de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$, soit x_E un point quelconque de E . Question : *les classes d'homologie des n -cycles $\text{Log}^{-1}(x_E)$, lorsque E décrit la famille des composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$, sont-elles \mathbb{R} -linéairement indépendantes dans $H_n(\mathbb{T}^n \setminus V, \mathbb{R})$?*²
2. Même situation que dans la question précédente : *les différents développements de Laurent pour $1/f$ dans les divers domaines de Reinhardt $\text{Log}^{-1}(E)$, E parcourant l'ensemble des composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$, sont-ils \mathbb{C} -linéairement indépendants ?*
3. Par le théorème 1.2, on sait que les composantes connexes F_ν du complémentaire de la co-amibe d'une hypersurface sont convexes dès que leur intérieur est non vide. On peut alors naturellement se poser la question suivante : *Toutes les composantes F_ν de $T^n \setminus \text{co-}\mathcal{A}_V$ sont elles convexes ?*

§2. Amibes d'hypersurfaces

Les hypersurfaces complexes sont données comme lieux de zéros d'une seule fonction algébrique. On parle aussi de « sous-ensemble algébrique de codimension un ». C'est à ce cadre que cette section est dédiée.

2. La réponse est évidemment oui dans le cas $n = 1$; en effet dans ce cas, l'amibe consiste en les points $-\infty < \log |a_1| < \dots < \log |a_m| < +\infty$, où les $|a_j|$ sont les valeurs distinctes (ordonnées dans l'ordre croissant) des modules des zéros de f ; les composantes E sont les intervalles $]-\infty, \log |a_1|[$, $]\log |a_1|, \log |a_2|[$, ..., $]\log |a_m|, +\infty[$, dont les pré-images par \log sont des couronnes concentriques centrées en 0. La classe d'homologie de x_E est celle du 1-cycle consistant en n'importe quel cercle de centre l'origine inclus dans la couronne $\log^{-1}(E)$. Ces classes d'homologie sont trivialement \mathbb{R} -linéairement indépendantes dans $H_1(\mathbb{T} \setminus V, \mathbb{R})$.

§2.1. La fonction de Jensen-Ronkin

On doit ici rappeler un résultat classique de Jensen sur la distribution des zéros des polynômes en une variable (on peut tout aussi bien considérer en place d'un polynôme une fonction holomorphe d'une variable complexe dans un disque centré à l'origine ou une fonction entière.

Soit donc $f = (z - a_1) \cdots (z - a_n)$ un polynôme à coefficients complexes donc les zéros (comptés avec multiplicité) sont rangés dans l'ordre des modules croissants : $|a_1| \leq \cdots \leq |a_n|$. Au polynôme f , on peut associer sa fonction (intégrale) de Jensen :

$$r \in \mathbb{R}^+ \mapsto N_f(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

On note que sur le cercle de centre l'origine et de rayon r ?

$$\frac{dz}{iz} = \frac{d(re^{i\theta})}{ire^{i\theta}} = \frac{rie^{i\theta} d\theta}{ire^{i\theta}} = d\theta.$$

Ceci permet de réécrire

$$N_f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \log |f(z)| \frac{dz}{z}.$$

Si $f(0) \neq 0$, on dispose de la *formule de Jensen* :

$$N_f(r) = \log |f(0)| + \sum_{k=1}^m \log \frac{r}{|a_k|},$$

où $m = m(r)$ désigne le plus grand entier k tel que $|a_k| < r$.

On observe pour justifier cette égalité que du fait de sa définition la fonction de Jensen est réelle, et par conséquent

$$N_f(r) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \left[\sum_{k=1}^n \log (a_k - z) \right] \frac{dz}{z} \right\}.$$

On obtient ainsi $N(r)$ comme intégrale d'une fonction analytique, bien que multivaluée, à savoir la fonction

$$r \mapsto \sum_{k=1}^m \left(\log z + \log \left(\frac{a_k}{z} - 1 \right) \right) + \sum_{k=m+1}^n \left(\log a_k + \log \left(1 - \frac{z}{a_k} \right) \right).$$

Du fait de la formule de Cauchy

$$\int_{|z|=r} \sum_{k=1}^m \log \left(\frac{a_k}{z} - 1 \right) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{|z|=r} \sum_{k=m+1}^n \log \left(1 - \frac{z}{a_k} \right) = 0.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} N_f(r) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} (m \log z + \log(a_{m+1} \dots a_n)) \frac{dz}{z} \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} m (\log r + i\theta) d\theta \right\} + \log |a_{m+1} \dots a_n| = \\ &= m \log r + \log |a_{m+1} \dots a_n|. \end{aligned}$$

On a d'autre part $a_1 \dots a_n \times (-1)^n = f(0)$. En exploitant ce fait, on aboutit bien à la formule de Jensen

$$N_f(r) = m \log r + \log \frac{|f(0)|}{|a_1 \dots a_m|} = \log |f(0)| + \sum_{k=1}^m \log \frac{r}{|a_k|}.$$

On note qu'entre deux zéros consécutifs du polynôme f , la fonction H_f est affine en $\log r$ (i.e égale à $r \mapsto m(r) \log(r) + \text{constante}$) et que sa dérivée (constante) en r vaut $m(r)$, nombre de zéros de f (comptés toujours avec multiplicité) inclus dans $D(0, r)$ (voir la figure 2.1.).

Lemme. *Supposons que f ne s'annule pas sur le cercle $\{|z| = r\}$. Alors*

$$\frac{\partial N_f}{\partial \log r} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f'}{f} df.$$

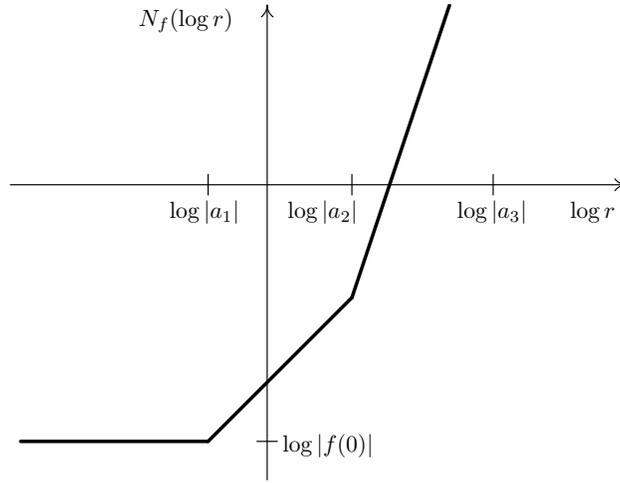


Fig. 2.1. : graphe de N_r fonction de $\log r$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_f}{\partial \log r} &= \frac{\partial}{\partial \log r} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \log |f(z)| \frac{dz}{z} \right) = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \log r} \int_{|z|=r} \log |f(z)| d \log r = \frac{1}{2\pi i} \log |f(z)| = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f' d \log r = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f'}{f} df.
 \end{aligned}$$

□

Suivant ces expressions pour l'intégrale N_f , il est commode de la représenter aussi sous la forme

$$\mathcal{N}_f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=e^x} \log |f(z)| \frac{dz}{z}.$$

Une extension dans le cadre de plusieurs variables de la fonction de Jensen a été proposée par L. I. Ronkin en 2001 ; on l'appellera fonction de Jensen-Ronkin. On l'associe soit à un polynôme ou un polynôme de Laurent, ou

même une série de Laurent qui converge dans $\text{Log}^{-1}(\Omega)$, où Ω est un ouvert convexe de \mathbb{R}^n . Elle est définie par

$$N_f(x) := \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\text{Log}^{-1}(x)} \log |f(z_1, \dots, z_n)| \frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_n}{z_n}.$$

Les propriétés suivantes de la fonction \mathcal{N}_f ont été obtenues par L.I. Ronkin en 2001.

- i) La fonction $x \mapsto \mathcal{N}_f(x)$ est convexe ;
- ii) Sur chaque composante connexe de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$, la fonction \mathcal{N}_f est affine.

Sur les figures 2.2 et 2.3, on voit des exemples de graphes de fonctions de Jensen-Ronkin. Les zones ombrées correspondent au graphe au dessus de l'amibe, tandis que les zones qui ne le sont pas correspondent au graphe de la fonction affine correspondante au dessus de la composante connexe du complémentaire de \mathcal{A}_f concernée.

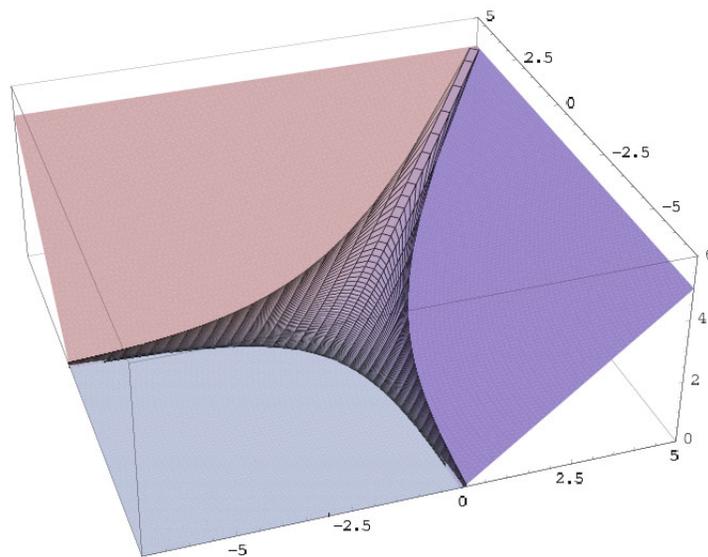


Fig. 2.2 : le graphe de la fonction de Jensen-Ronkin de $f(z) = 1 + z_1 + z_2$

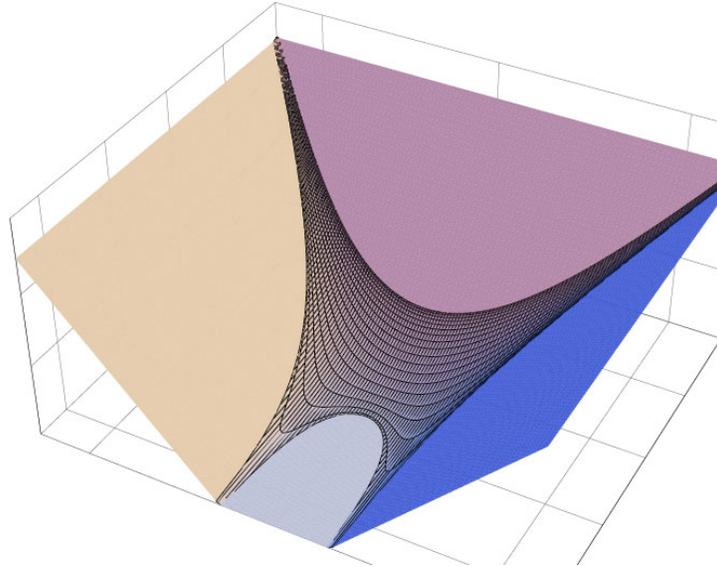


Fig. 2.3 : le graphe de la fonction de Ronkin de $f(z) = z_1 - 5 - 2(z_2 + z_2^{-1})$.

§2.2. Structure géométrico-combinatoire de l'amibe d'une hypersurface

On note \mathbb{T}^n le tore complexe $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$. Considérons dans \mathbb{T}^n un polynôme de Laurent

$$f(z) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha z^\alpha = \sum c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} z_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot z_n^{\alpha_n}, \quad (2.1)$$

où $A \subset \mathbb{Z}^n$ est un sous-ensemble fini.

Définition. On appelle polyèdre de Newton Δ_f du polynôme de Laurent non nul f ci dessus l'enveloppe convexe fermée dans \mathbb{R}^n de l'ensemble des points $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tels que $c_\alpha \neq 0$.

Le lieu (dans \mathbb{T}^n) des zéros d'un polynôme de Laurent non nul f est une hypersurface algébrique définie par $V = \{f = 0\}$. On rappelle que l'amibe de f est l'image \mathcal{A}_f de V par l'application Log de \mathbb{T}^n dans \mathbb{R}^n agissant comme

$$(z_1, \dots, z_n) \rightarrow (\log |z_1|, \dots, \log |z_n|).$$

Comme on l'a déjà dit Log est une application propre du fait que l'image réciproque d'un point $u \in \mathbb{R}^n$ est le tore réel de \mathbb{T}^n défini comme

$$\text{Log}^{-1}(u) = \{|z_1| = e^{u_1}, \dots, |z_n| = e^{u_n}\}.$$

Ainsi \mathcal{A}_f est fermée comme image d'un fermé et son complémentaire est ouvert. Le complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ consiste en un nombre fini de composantes connexes, toutes ouvertes et convexes.

Soit E précisément une composante connexe de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$. On doit ici invoquer quelques faits provenant de l'analyse convexe.

Définition. *Le cône de récession Γ d'un sous-ensemble convexe E de \mathbb{R}^n est le plus grand cône de \mathbb{R}^n que l'on puisse inscrire dans E , une fois l'avoir éventuellement translaté (e.g. $(x + \Gamma) \subset E$).*

Définition. *Le cône dual à un polyèdre Δ_f de \mathbb{R}^n en un point v de ce polyèdre est*

$$C_v^\vee := \{s \in \mathbb{R}^n : \langle s, v \rangle = \max_{\alpha \in \Delta_f} \langle s, \alpha \rangle\}.$$

La relation entre la structure combinatoire du polyèdre de Newton Δ_f du polynôme de Laurent f et la structure du complémentaire de l'amibe \mathcal{A}_f dans \mathbb{R}^n est donnée par le résultat suivant.

Théorème 2.1 ([11]). *Soit $V = \{f(z) = 0\}$ une hypersurface algébrique de \mathbb{T}^n . Il existe une application d'ordre injective de l'ensemble des composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ dans l'ensemble des points de \mathbb{Z}^n appartenant à Δ_f , soit*

$$\nu : \{E\} \rightarrow \mathbb{Z}^n \cap \Delta_f$$

telle que, si E est une composante connexe de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$, le cône dual $C_{\nu(E)}^\vee$ à Δ_f en $\nu(E)$ soit exactement le cône de récession de E .

Suivant donc ce théorème, il y a une correspondance bijective entre l'ensemble des composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ et un certain sous-ensemble de $\Delta_f \cap \mathbb{Z}^n$. En d'autres termes, $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ consiste en un nombre fini de composantes connexes convexes, et celles-ci sont identifiées en correspondance avec un certain sous-ensemble de $\Delta_f \cap \mathbb{Z}^n$. On peut donc noter une composante connexe E_ν , où ν est un point parfaitement déterminé de $\Delta_f \cap \mathbb{Z}^n$.

Sur la figure 2.4, on a représenté le polyèdre de Newton du polynôme $f(z_1, z_2) = 1 + z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 - 4z_1 z_2$ ainsi que les composantes E_ν en correspondance avec des points ν de $\Delta_f \cap \mathbb{Z}^2$. Sur la figure 2.5, on a fait le même travail lorsque f est le produit de trois fonctions affines en position générale.

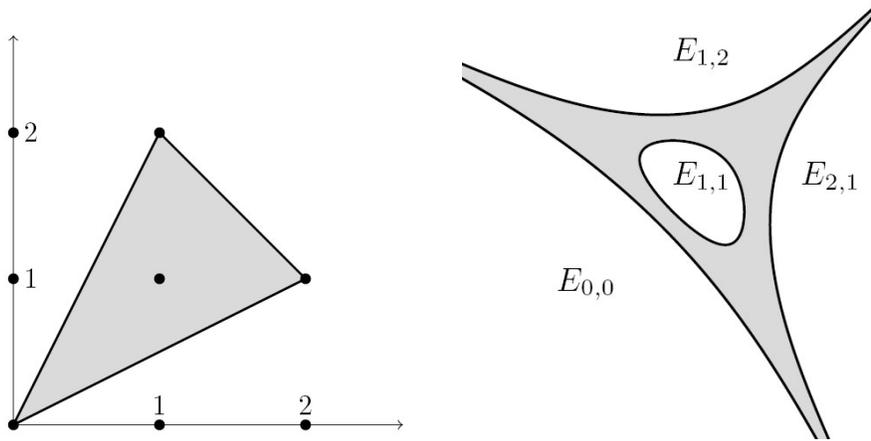


Fig. 2.4. $f(z) = 1 + z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 - 4z_1 z_2$

L'ordre $E \mapsto \nu(E)$ admet plusieurs réalisations. Suivant l'une d'elles $\nu(E)$ figure la valeur du gradient (constant) de la fonction de Jensen-Ronkin évaluée sur E (on se souvient ici que cette fonction est affine sur E) :

$$\nu(E) = \text{grad } N_f(x), \quad x \in E.$$

En voici une seconde interprétation : la coordonnée $\nu_j(E)$ de $\nu(E)$ représente le « nombre d'accouplement » (*linking number* dans la terminologie anglo-saxonne) entre $\{f = 0\} = V$ et le tore réel (assimilé à T^n) qu'est le sous-ensemble $\{z \in \mathbb{T}^n; |z_j| = e^{x_j}, j = 1, \dots, n\}$, [11]). Il existe aussi une représentation intégrale pour $b = \nu_j$ (voir aussi [11]).

Quand $n = 2$ et que Δ_f est d'intérieur non vide, les points de $\Delta_f \cap \mathbb{Z}^2$ sont

- soit intérieurs à Δ_f ;
- soit sommets de Δ_f ;
- soit points des intérieurs relatifs des faces de dimension un (facettes) de Δ_f .

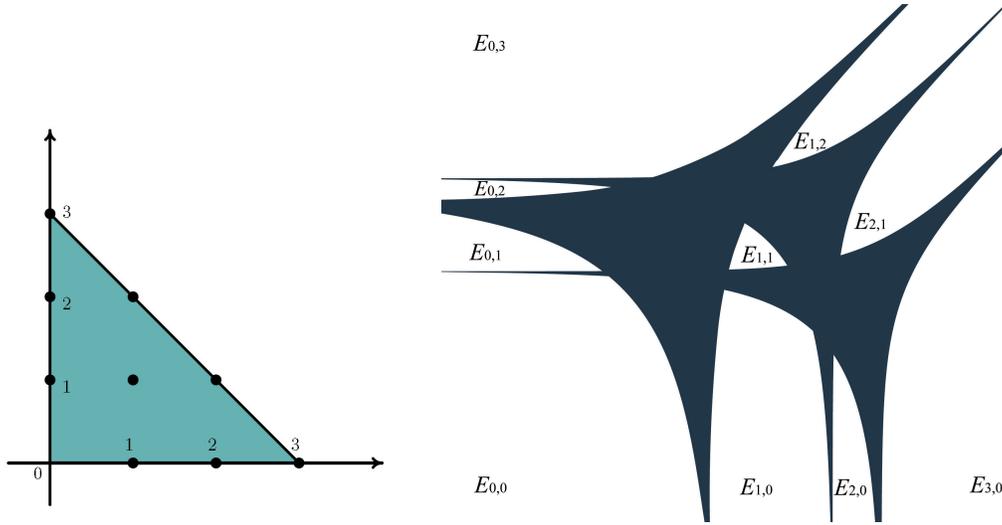


Fig. 2.5. $f(z) = \prod_1^3 (\alpha_j z_1 + \beta_j z_2 + \gamma_j)$

Le cône de récession de E dans chacun de ces cas est soit $\{0\}$ (dans le premier cas), soit un cône propre de dimension 2 de \mathbb{R}^2 (dans le second cas), soit enfin un cône de dimension 1, c'est-à-dire une demi-droite issue de l'origine, dans le dernier cas.

Le théorème 2.1 implique le corollaire suivant.

Corollaire. *Le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ est fini, égal au nombre de points à coordonnées entières de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$:*

$$\#\text{sommets}(\Delta_f) \leq \#E \leq \#(\mathbb{Z}^n \cap \Delta_f).$$

Ainsi le polyèdre de Newton de f reflète jusqu'à un certain point la structure de l'amibe du lieu des zéros de f dans le tore complexe \mathbb{T}^n . L'information dont on dispose sur la combinatoire de ce polyèdre de Newton Δ_f n'est toutefois pas suffisante pour déterminer complètement la structure de \mathcal{A}_f . Le fait est que suivant les valeurs imposées aux coefficients c_α de f , des composantes connexes de cône de récession un cône de dimension strictement inférieure à n (on dit alors *de cône de récession dégénéré*) peuvent apparaître ou non dans le complémentaire de \mathcal{A}_f . Suivant [24], il existe, pour tout sous-ensemble Δ'_f de $\Delta_f \cap \mathbb{Z}^n$, un choix de coefficients c_α tel que l'amibe \mathcal{A}_f soit telle que

son complémentaire consiste exactement en composantes connexes E_ν d'ordre $\nu \in \Delta'_f$.

Les amibes \mathcal{A}_f représentées sur les figures 2.4 et 2.5 correspondent à des situations où le complémentaire de l'amibe présente une composante connexe E_ν pour tout $\nu \in \Delta_f \cap \mathbb{Z}^n$. Il faut noter qu'en dimension 2, les composantes bornées, c'est-à-dire les « trous », de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}_f$, correspondent aux ordres ν tels que ν soit un point de \mathbb{Z}^2 intérieur à Δ_f ; sur la figure 2.6 par exemple, correspondant au cas où $f = 1 + z_1^3 + z_1^2 z_2^2 + a z_1 z_2 + b z_1^2 z_2$, on observe deux trous correspondant aux points de \mathbb{Z}^2 intérieurs à Δ_f ; parmi les composantes E restantes, celles qui contiennent un secteur angulaire d'ouverture non nulle correspondent aux sommets de Δ_f , tandis que les autres correspondent à un ordre appartenant à l'intérieur relatif de l'une des facettes de Δ_f .

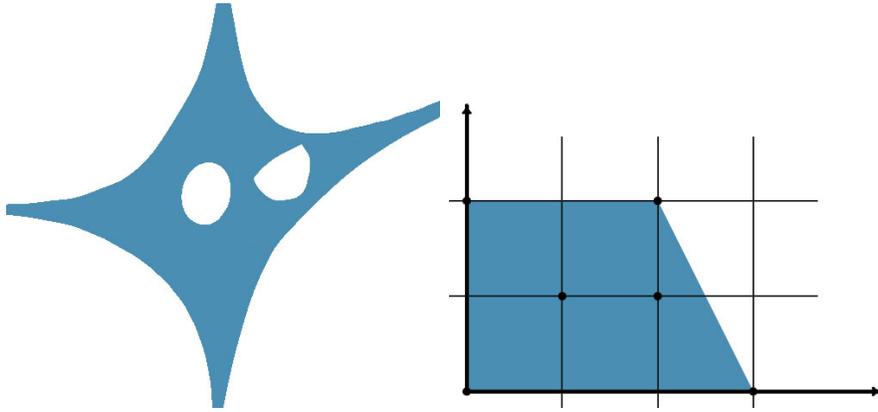


Fig. 2.6 : $f = 1 + z_1^3 + z_1^2 z_2^2 + a z_1 z_2 + b z_1^2 z_2$

§2.3. Le squelette de l'amibe

On rappelle que pour un certain sous-ensemble A de \mathbb{Z}^n , le polynôme de Laurent f se représente sous la forme (2.1) avec $c_\alpha \neq 0$. On rappelle aussi que la fonction de Jensen-Ronkin \mathcal{N}_f est convexe et de plus qu'elle est affine sur chaque composante $E = E_\nu$ de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$. On observe que toutes les composantes « plates » du graphe de $\mathcal{N}_f(x)$, c'est-à-dire celles situées au dessus de composantes connexes E de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$, une fois prolongées à l'espace \mathbb{R}^3 tout entier par linéarité, s'intersectent deux à deux dans l'espace et que l'union de ces intersections deux à deux se projette dans le plan où vit \mathcal{A}_f sur

un sous-ensemble inclus dans cette amibe. Le sous-ensemble de \mathcal{A}_f obtenu ainsi constitue le support d'un complexe polyédral. On appelle ce support le squelette de \mathcal{A}_f et on le notera \mathcal{S}_f .

On sait que sur une composante $E = E_\nu$, on a $\text{grad } \mathcal{N}_f(x) = \nu$ et par conséquent

$$\mathcal{N}_f(x) = \mathbf{c}_\nu + \langle \nu, x \rangle$$

pour une certaine constante réelle \mathbf{c}_ν . Dans [22], il est démontré que c_ν admet la représentation intégrale

$$\mathbf{c}_\nu = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\text{Log}^{-1}(x)} \log \left| \frac{f(z)}{z^\nu} \right| \frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_n}{z_n}, \quad x \in E_\nu.$$

Ainsi, pour réaliser le squelette \mathcal{S}_f de l'amibe \mathcal{A}_f , il convient de prendre le sous-ensemble fini A' de $\mathbb{Z}^n \cap \Delta_f$ consistant en tous les points α de $\mathbb{Z}^n \cap \Delta_f$ tels que $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ admette une composante E_α d'ordre α , puis ensuite de considérer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que le maximum de la fonction

$$S(x) = \max_{\alpha \in A'} \{ \mathbf{c}_\alpha + \langle \alpha, x \rangle \}$$

soit atteint pour strictement plus d'une des fonctions affines $\{c_\alpha + \langle \alpha, x \rangle\}$ impliquées dans la définition de S .

Les principales propriétés du squelette sont résumées dans l'énoncé suivant.

Théorème 2.2 ([22]). *Le squelette de l'amibe \mathcal{A}_f s'obtient comme un rétracté par déformation (au sens fort) de l'amibe \mathcal{A}_f elle même. Le complémentaire du squelette \mathcal{S}_f consiste en un nombre fini de polyèdres convexes de \mathbb{R}^n (bornés ou non), chacun de ces polyèdres contenant exactement une et une seule composante connexe du complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ de l'amibe \mathcal{A}_f .*

Sur les figures 2.7 et 2.8, on a représenté l'amibe \mathcal{A}_f et son squelette respectivement lorsque f définit une droite complexe, puis lorsque le polynôme de Laurent $f(z)$ est $f(z) = 1 + z_1 + z_1^2 z_2^2 + a z_1 z_2 + b z_1^2 z_2$.

La question de la relation entre squelette des amibes et géométrie tropicale sera traité dans la section 4 de ce cours.

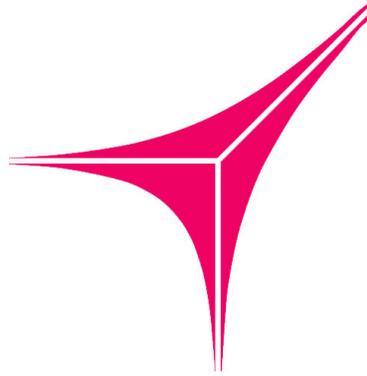


Fig. 2.7 : l'amibe et son squelette d'une droite complexe de \mathbb{T}^2

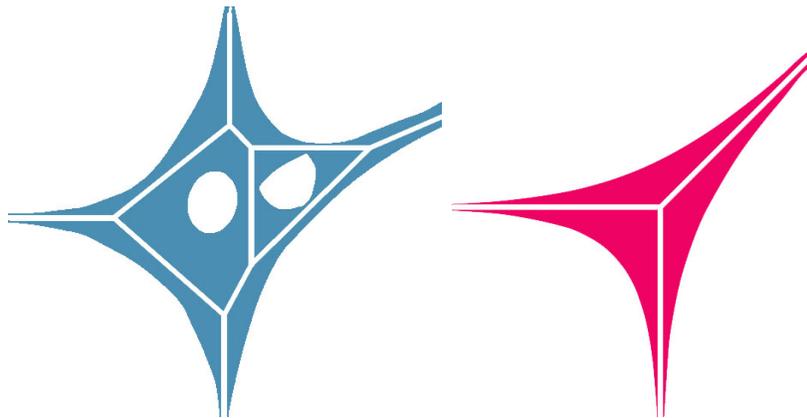


Fig. 2.8 : amibe et squelette lorsque $f(z) = 1 + z_1 + z_1^2 z_2^2 + a z_1 z_2 + b z_1^2 z_2$

§2.4. Amibes d'hypersurfaces transcendentes

Comme on vient de le montrer, l'amibe d'une hypersurface algébrique $\{f = 0\}$ hérite de beaucoup d'informations contenues dans la structure du polyèdre de Newton du polyôme f . Qu'en est-il si l'on remplace le polynôme f par une série entière ?

Soit Q une série de Laurent en n variables $z = (z_1, \dots, z_n)$ qui n'est pas un polynôme, i.e

$$Q(z) = \sum_{\alpha \in AC\mathbb{Z}^n} a_\alpha z^\alpha, \quad (2.2)$$

où le sous-ensemble $A \subset \mathbb{Z}^n$ des α tels que $c_\alpha \neq 0$ est supposé cette fois infini. Pour parler d'amibe dans ce nouveau cadre, il convient de faire plusieurs hypothèses supplémentaires.

1. Tout d'abord il faut supposer que le domaine d'absolue convergence (dans \mathbb{T}^n) de la série de Laurent (centrée à l'origine) figurant au second membre de (2.2) est non vide.
2. Comme une fonction définie dans un domaine G comme la somme d'une série de Laurent centrée en 0 peut fort bien ne pas s'annuler dans G , il nous faut ici en second lieu supposer que $G \cap Q^{-1}(0) \neq \emptyset$; on notera alors

$$V = \{z \in G \cap \mathbb{T}^n : Q(z) = 0\}$$

l'hypersurface des zéros de Q dans G . On définit alors l'amibe \mathcal{A}_Q comme $\mathcal{A}_Q = \mathcal{A}_V := \text{Log}(V)$.

Il nous faut maintenant clarifier où « vit » l'amibe d'une hypersurface quelconque V ; dans le cas où V est algébrique et donnée comme $V = \{f = 0\}$, le domaine où vit \mathcal{A}_f est \mathbb{R}^n tout entier. Dans le cas général, l'univers où vit \mathcal{A}_Q est inclus dans l'image par Log du domaine (de Reinhardt) d'absolue convergence G de la série (2.2), voir les figures 2.9 et 2.10. Introduisons la notation

$$\mathcal{G} = \text{Log}(G)$$

pour désigner l'image par Log du domaine G d'absolue convergence de Q . On sait par l'analyse multi-complexe que le domaine d'absolue convergence d'une série de Laurent centrée en 0 est logarithmiquement convexe, ce qui implique que \mathcal{G} est convexe.

Dans le cadre algébrique on a $\mathcal{G} = \mathbb{R}^n$ et l'amibe V est un sous-ensemble propre de $\mathcal{G} = \mathbb{R}^n$ de complémentaire ouvert. Il n'en est pas de même en

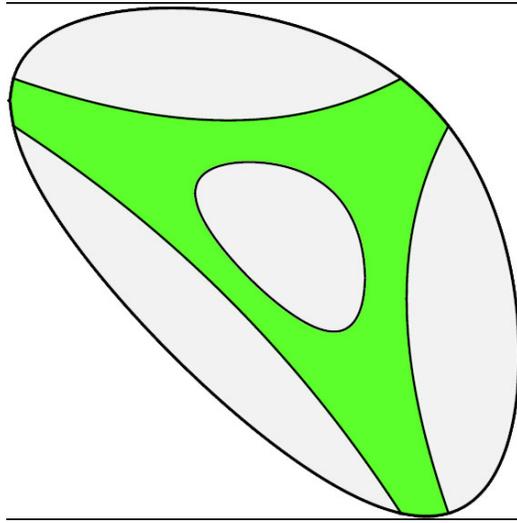


Fig. 2.9 : amibe de la somme d'une série de Laurent centrée en 0, cas $\mathcal{N}_Q = \mathbb{R}^2$

général dans le cadre général et l'on peut fort bien avoir l'égalité ensembliste $\mathcal{A}_V = \mathcal{G}$. Pour parer à cela, on contraint le support A de Q à être inclus dans un cône *strict*, c'est-à-dire soit tel que l'enveloppe convexe fermée \mathcal{N}_Q de A dans \mathbb{R}^n ne contienne aucune droite réelle.

Dans ce cadre général, on peut dire que le polyèdre \mathcal{N}_Q joue le rôle joué par le polyèdre de Newton dans le cadre algébrique. Sinon, il s'agit d'un cône polyédral qui peut fort bien ne pas être ici rationnel. Voici un résultat permettant d'extraire de l'information sur la structure de $\mathcal{G} \setminus \mathcal{A}_Q$ à partir de l'objet \mathcal{N}_Q .

Théorème 2.3 ([21]). *Si la série Q est telle que l'enveloppe convexe fermée \mathcal{N}_Q ne contient aucune droite, alors à l'ensemble des sommets de \mathcal{N}_Q correspond de manière bi-univoque une famille de composantes connexes de $\mathcal{G} \setminus \mathcal{A}_Q$.*

Sur la figure 2.9, on a représenté le cas où l'ensemble des sommets de \mathcal{N}_Q est vide du fait que ce cône s'identifie à \mathbb{R}^2 .

§3. Amibes de surfaces algébriques de codimension strictement supérieure à 1

Soit une surface algébrique $V \subset \mathbb{C}^n$ ($n > 1$) supposée de dimension pure d , ce qui signifie que toutes les composantes irréductibles sont de même dimension d . On note $k = n - d$ la codimension de V . Lorsque $k = 1$, V est une hypersurface, cas traité en détails dans la section 2. Nous traitons ici du cas $k \geq 2$.

On commence par énoncer un résultat de convexité pour les composantes connexes du complémentaire de l'amibe \mathcal{A}_V .

On introduit ensuite la notion de *contour* pour l'amibe d'une surface complexe, notion qui fournit une information sur la géométrie différentielle de la surface, notamment concernant l'application polynomiale de Gauss.

À titre d'exemples, on considère les strates singulières du discriminant classique et les discriminants des transformations polynomiales de \mathbb{C}^n .

§3.1. Propriété de $(k - 1)$ -convexité du complémentaire de l'amibe

On peut formuler pour chaque composante connexe d'un sous-ensemble X de \mathbb{R}^n (ou plus généralement d'un \mathbb{R} -espace vectoriel arbitraire la propriété de convexité en termes de groupes d'homologie 0-dimensionnelle réduite : dire que toute composante E de X est connexe équivaut à dire que pour toute droite ℓ de \mathbb{R}^n , l'homomorphisme

$$i_* : \tilde{H}_0(\ell \cap X) \rightarrow \tilde{H}_0(X)$$

induit par ce plongement est injectif; ceci signifie que si deux points d'une même composante de X sont connectés par un chemin dans X , ils le sont par un chemin sur ℓ . On parle de 0-convexité pour la notion de convexité formulée ainsi. La définition suivante propose une généralisation de cette notion.

Définition 3.1. *Les composantes connexes d'un sous-ensemble E de $X \subset \mathbb{R}^n$ sont dites $(k - 1)$ -convexes (ou plus simplement X est dit $(k - 1)$ -convexe) si et seulement si, pour tout k -plan π de \mathbb{R}^n , l'homomorphisme*

$$i_* : H_{k-1}(\pi \cap X) \rightarrow H_{k-1}(X)$$

induit par le plongement est injectif.

Pour formuler le principal résultat de cette sous-section, on rappelle qu'un sous-ensemble algébrique d -dimensionnel de \mathbb{T}^n est dit *intersection complète* s'il est défini par exactement $k = n - d$ équations, soit

$$V = \{z \in \mathbb{T}^n : P_1(z) = \cdots = P_k(z) = 0\}.$$

Théorème 3.1 ([7]). *Le complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ de l'amibe d'une intersection complète V de codimension $k \in \{1, \dots, n\}$ est $(k - 1)$ -convexe.*

Apparemment, exiger que V soit intersection complète semble redondant. La conjecture suivante semble en effet plausible :

Conjecture 3.1. *Tout sous-ensemble algébrique de dimension pure de \mathbb{T}^n peut être défini comme intersection complète dans \mathbb{T}^n .*

À l'appui de cette conjecture, on mentionne que les obstacles rencontrés ordinairement lorsqu'il s'agit de définir un ensemble algébrique par un nombre minimal d'équations peuvent ici être contournés au pris de la création de composantes irréductibles « parasites » incluse dans l'union des plans de coordonnées, soit dans $\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{T}^n$.

Le théorème 3.1 précise un résultat de [13] qui, répondant à une question de B. Sturmfels, a prouvé que toute classe non-négative non triviale dans $H_{k-1}(\pi \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V))$ en est aussi une non-triviale dans $H_{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V)$.

Un cycle $\gamma \in Z_{k-1}(\pi)$ est dit *non-négatif* (pour une orientation fixée du k -plan π) si la classe d'holonomie $[\gamma] \in H_{k-1}(\pi \setminus \{p\}) \simeq \mathbb{Z}$ est non-négative pour tout p hors du support de γ .

Pour un $(k - 1)$ -cycle homologiquement non trivial, de plus non-négatif, γ avec γ de support dans $\pi \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V)$, Henriques est parvenu à prouver que γ est non trivial dans $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ en utilisant le « linking » topologique entre \bar{V} et la classe $\varphi([\gamma])$, où \bar{V} est l'adhérence de V dans \mathbb{C}^n et φ est un homomorphisme approprié

$$\varphi : H_{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V) \rightarrow H_{2k-1}(\mathbb{C}^n \setminus \bar{V}).$$

En d'autres mots, la preuve de l'injectivité de i_* sur le sous-semi-groupe des $(k - 1)$ -cycles non-négatifs se fonde sur la théorie de l'intersection. En situation générale, si l'on considère les cycles arbitraires γ in $\pi \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V)$, on invoque la théorie des résidus.

En écho au problème ouvert 2 en fin de section 1, formulons la conjecture suivante entre les groupes mentionnés.

Conjecture 3.2. *Si $\{\gamma_j\}$ est une famille de $(k-1)$ -cycles homologiquement indépendants dans $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$, alors $\{\text{Log}^{-1} \gamma_j\}$ est une famille de $(n+k-1)$ -cycles homologiquement indépendants dans $\mathbb{T}^n \setminus V$.*

Il semble que cette conjecture n'a jamais encore été prouvée ou disprovée, même sous l'hypothèse $k = 1$. Dans ce cas, elle est toutefois confirmée pour les hypersurfaces union d'un nombre fini d'hyperplans.

§3.2. Esquisse de preuve du théorème 3.1

Soit $\pi \subset \mathbb{R}^n$ un k -plan arbitraire et $\gamma \in Z_{k-1}(\pi \cap \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V)$ un $(k-1)$ -cycle. Il existe un k -plan rationnel π_0 , c'est-à-dire un k -plan de la forme $x^0 + \mathcal{L}$ où $x^0 \in \mathbb{Z}^n$ et \mathcal{L} , \mathbb{R} -sous-espace k dimensionnel avec une base de vecteurs dans \mathbb{Z}^n) arbitrairement proche de π (pour la distance entre k -plans dans la grassmannienne $G(n, k)$) dans un compact donné de \mathbb{R}^n . Comme le support du cycle γ est compact et que l'amibe est fermée, ce k -plan rationnel peut être choisi de manière à ce que la k -chaîne obtenue par projection orthogonale de γ sur π_0 ne rencontre pas l'amibe (voir la figure Fig. 3.1) où le support orienté de γ est indiqué par des flèches tandis que $\text{Pr}(\gamma)$ désigne l'image de γ par cette projection orthogonale sur π_0). Alors, si l'on prouve la non-trivialité

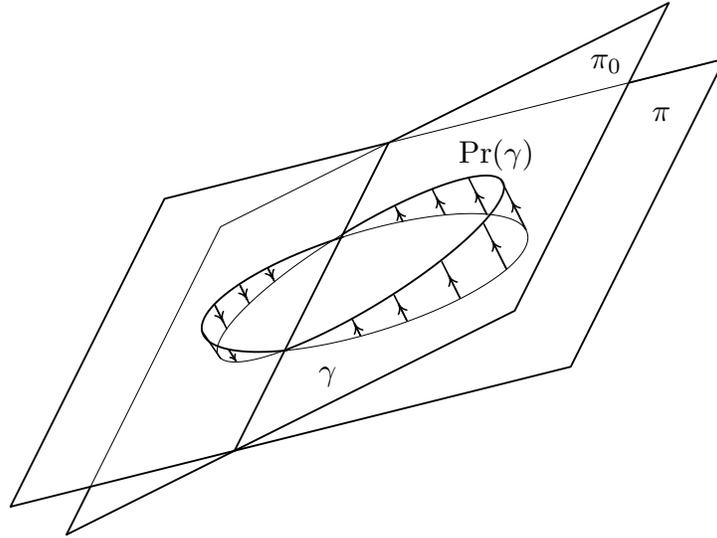


Fig 3.1.

d'un cycle $\text{Pr}(\gamma)$ in $\pi_0 \cap \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ implique celle de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$, alors la même chose subsiste dans π pour le cycle γ homotope à $\text{Pr}(\gamma)$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$. Il suffit donc de prouver que l'homomorphisme

$$i_* : H_{k-1}(\pi \cap \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V) \rightarrow H_{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V)$$

est injectif pour tous les k -plans π rationnels. Soit donc $\pi = x^0 + \mathcal{L}$ un tel k -plan. Dans le sous-réseau $L = \mathcal{L} \cap \mathbb{Z}^n$, soit une base de vecteurs colonne a^1, \dots, a^k que l'on complète en une base du réseau \mathbb{Z}^n (suivant le théorème des facteurs invariants, [8], Théorème 16.6), c'est-à-dire en une matrice unimodulaire

$$A = (a^1, \dots, a^k, a^{k+1}, \dots, a^n).$$

Les coordonnées y d'un élément $x \in \mathbb{R}^n$ dans cette base sont exprimées par la formule $y = A^{-1}x$; le sous-espace \mathcal{L} dans les coordonnées y est défini comme $y'' = 0$, où l'on écrit $y = (y', y'')$ pour $y = (y_1, \dots, y_n)$ avec $y' = (y_1, \dots, y_k)$ and $y'' = (y_{k+1}, \dots, y_n)$. Suivant cela, en les coordonnées y le plan π devient un plan «horizontal» $y'' = (A^{-1}x^0)''$ (voir la figure Fig. 3.2, où π intersecte seulement les tentacules de l'amibe et l'intersection s'opère en position générale³). On rappelle que les coordonnées x dans \mathbb{R}^n sont reliées aux coordonnées z dans \mathbb{T}^n par la formule $\text{Log } z = x$. Suivant cela, les coordonnées y correspondent aux coordonnées $w \in \mathbb{T}^n$ telles que $z = w^A$ ou, de manière plus précise,

$$\begin{aligned} z_1 &= w_1^{a_1^1} \dots w_n^{a_n^1} \\ &\dots \\ z_n &= w_n^{a_n^1} \dots w_n^{a_n^n}. \end{aligned}$$

Supposons que V soit défini en les coordonnées w comme

$$V = \{w \in \mathbb{T}^n : P_1(w) = \dots = P_k(w) = 0\}.$$

À l'application polynomiale $P = (P_1, \dots, P_k) : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}_\zeta^k$, on associe une forme différentielle $P^*\omega$ de bi-degré $(k, k-1)$, où ω désigne le noyau de Bochner-Martinelli

$$\omega(\zeta) = \frac{(k-1)! \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \bar{\zeta}_j d\bar{\zeta}_1 \wedge \dots [j] \dots \wedge d\bar{\zeta}_k}{(2\pi i)^k \|\zeta\|^{2k}} d\zeta = \omega_0 \wedge d\zeta.$$

3. Aux fins de ne pas compliquer la figure, on n'y montre pas π intersectant l'amibe en position non générale ou passant au travers des «trous».

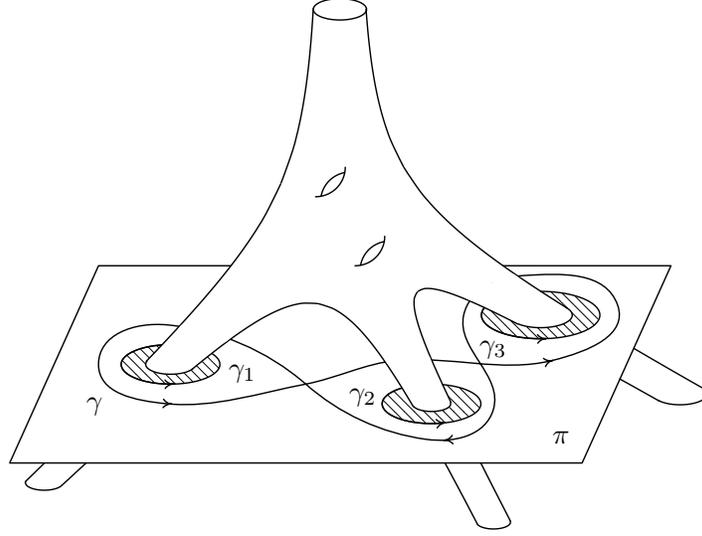


Fig. 3.2.

Ici, comme d'habitude, $[j]$ signifie que le facteur $d\bar{\zeta}_j$ a été omis, on note aussi $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_k$ et, finalement, ω_0 est la $(0, k-1)$ -forme correspondante. On note que $\omega(\zeta)$ est fermée $\bar{\partial}$ -closed dans son domaine de régularité $\mathbb{C}^k \setminus \{0\}$. La forme $P^*\omega$ se représente aussi comme le produit $P^*(\omega_0) \wedge dP_1 \wedge \cdots \wedge dP_k$. Le lemme suivant joue le rôle majeur dans la preuve du théorème 3.1.

Lemme 3.1. *Soit γ un $(k-1)$ -cycle supposé homologiquement non trivial dans $\pi \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V)$. Il existe alors un polynôme de Laurent $g(w)$ tel que*

$$\int_{\text{Log}^{-1}\gamma} g(w) \cdot P^*(\omega) \wedge \frac{dw_{k+1}}{w_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \frac{dw_n}{w_n} \neq 0. \quad (3.1)$$

La conclusion du théorème 3.1 résulte alors du lemme 3.1 et de la formule de Stokes. Plus précisément, l'intégrand dans (3.1) est une forme régulière et fermée dans $\mathbb{T}^n \setminus V$, et si γ se trouvait homologue à 0 dans $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$, alors $\text{Log}^{-1}\gamma$ serait aussi homologue à 0 dans $\mathbb{T}^n \setminus V$. Mais, suivant la formule de Stokes, ceci est en contradiction avec (3.1).

§3.3. Contour d'une amibe

On rappelle ici la notion de *contour* d'une amibe, introduite dans [23].

Définition 3.2. *Le contour de l'amibe \mathcal{A}_V est l'ensemble \mathcal{C}_V des valeurs critiques de l'application logarithmique Log restreinte à V , c'est-à-dire de l'application $\text{Log} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

On décrit la structure du contours en termes de l'application logarithmique de Gauss. Cette application a été introduite par Kapranov dans [15] pour les hypersurfaces, mais on peut l'étendre naturellement aux surfaces V de codimension k .

Définition 3.3. *Soit $\text{Gr}(n, k)$ la grassmannienne des k -plans de \mathbb{C}^n . L'application logarithmique de Gauss est l'application $\gamma : V \rightarrow \text{Gr}(n, k)$ qui associe à chaque point régulier $z \in \text{reg } V$ le k -sous-espace $\gamma(z)$ normal (en $\text{Log}_{\mathbb{C}} z$) à l'image $\text{Log}_{\mathbb{C}} V$ sous l'application $\text{Log}_{\mathbb{C}} : (z_1, \dots, z_n) \rightarrow (\log z_1, \dots, \log z_n)$.*

Dans le cas d'une hypersurface, on a

$$V = \{z \in \mathbb{T}^n : P(z) = 0\}$$

(ce qui signifie que lorsque $k = 1$ et donc $\text{Gr}(n, 1) = \mathbb{C}\mathbb{P}_{n-1}$, l'application logarithmique de Gauss $\gamma : V \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}_{n-1}$ s'exprime analytiquement comme

$$(z_1, \dots, z_n) \rightarrow \left(z_1 \frac{\partial P}{\partial z_1} : \dots : z_n \frac{\partial P}{\partial z_n} \right).$$

On sait (voir [18], [27]) que dans ce cas un point $z \in \text{reg } V$ est un point critique pour $\text{Log}|_V$ si et seulement si son image $\gamma(z)$ sous l'application logarithmique de Gauss se trouve dans le sous-espace projectif réel under the logarithmic Gauss map lies in the real projective subspace $\mathbb{R}\mathbb{P}_{n-1} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}_{n-1}$. Ainsi, lorsque $k = 1$, le contour \mathcal{C}_V de l'amibe \mathcal{A}_V d'une hypersurface est $\text{Log}(\gamma^{-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}_{n-1}))$.

§3.4. Relation entre le contour de l'amibe et l'application logarithmique de Gauss

Soit une surface algébrique $V \subset \mathbb{T}^n$, $n > 1$, supposée de (pure) dimension d , ce qui signifie que toutes les composantes irréductibles de V ont même dimension d . Soit $k = n - d$ la codimension (pure) de V . On rappelle que l'application logarithmique de Gauss $\gamma : V \rightarrow \text{Gr}(n, k)$ associe à chaque point $z \in \text{reg } V$ le sous-espace normal $\gamma(z) \in G(n, k)$ orthogonal en $\text{Log}_{\mathbb{C}} z$ à $\text{Log}_{\mathbb{C}} V$.

Lemme 3.2. *On suppose que V est définie au voisinage d'un point régulier z_0 comme $P_1(z) = \dots = P_k(z) = 0$, où le rang de l'application polynomiale P vaut k en z_0 . Alors l'application logarithmique de Gauss au point z_0 est donnée par la matrice Then the logarithmic Gauss map at this point is defined by the matrix*

$$\gamma(z) = \begin{pmatrix} z_1 \frac{\partial P_1}{\partial z_1} & \dots & z_n \frac{\partial P_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_1 \frac{\partial P_k}{\partial z_1} & \dots & z_n \frac{\partial P_k}{\partial z_n} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

dont les vecteurs ligne forment une base de l'espace normal à $\text{Log}_{\mathbb{C}} V$ en $\text{Log}_{\mathbb{C}}(z_0)$.

Théorème 3.2. *Un point $z \in \text{reg } V$ est un point critique pour l'application Log si et seulement si l'image $\gamma(z) \in G(n, k)$ par l'application logarithmique de Gauss contient*

- au moins $n - 2d + 1$ vecteurs réels linéairement indépendants lorsque $2d \leq n$,
- au moins un vecteur réel lorsque $2d \geq n$.

En particulier, dans le cas où V est une hypersurface ($k = 1$) ou une courbe ($k = n - 1$), un point $z \in \text{reg } V$ est critique pour Log si et seulement si $\gamma(z)$ est un vecteur réel (de coordonnées celles du vecteur ligne de $\gamma(z)$ lorsque $k = 1$, ou les $(n - 1, n - 1)$ -mineurs de la matrice (3.2) lorsque $k = n - 1$).

Esquisse de preuve. L'application $\text{Log}|_V : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la composée du logarithme complexe « complet » $\text{Log}_{\mathbb{C}}$

$$\text{Log}_{\mathbb{C}}(z) = \text{Log}(z) + i \text{Arg}(z) : V \rightarrow \{\mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n\}$$

avec la projection sur le plan \mathbb{R}^n des parties réelles :

$$\text{Log}|_V = \pi_{\mathbb{R}^n} \circ (\text{Log}_{\mathbb{C}})|_V.$$

Le logarithme complexe ne présente pas de points critiques sur $\text{reg } V$ car il s'agit d'une application (multivaluée) localement biholomorphe sur \mathbb{T}^n ; par conséquent, les points critiques pour $\text{Log}|_V$ proviennent seulement de la projection

$$\pi_{\mathbb{R}^n} : \text{Log}_{\mathbb{C}} V \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Les points critiques de cette projection sont déterminés par les propriétés de l'application linéaire tangente

$$d(\pi_{\mathbb{R}^n})|_{\text{Log}_{\mathbb{C}} V} : T_w(\text{Log}_{\mathbb{C}} V) \rightarrow T_{\text{Re}(w)}(\mathbb{R}^n), \quad w = \text{Log}_{\mathbb{C}}(z).$$

Voici un critère pour qu'un point régulier z de V soit critique pour $\text{Log}|_V$:

- pour $2d \leq n$, l'application linéaire tangente de la projection $\pi_{\mathbb{R}^n}$ est non-injective ;
- pour $2d \geq n$, l'application linéaire tangente de la projection $\pi_{\mathbb{R}^n}$ est non-surjective.

Les conditions de non-injectivité et de non-surjectivité sont liées au fait pour le sous-espace normal à $\text{Log}_{\mathbb{C}} V$ d'être réel ; en un certain sens, la figure 3.3 rend compte de cela : aux points critiques de la projection $\pi_{\mathbb{R}^n}$ le sous-espace normal est «horizontal», et par conséquent n'a pas de composante imaginaire, ce qui signifie précisément que $\gamma(z)$ est réel.

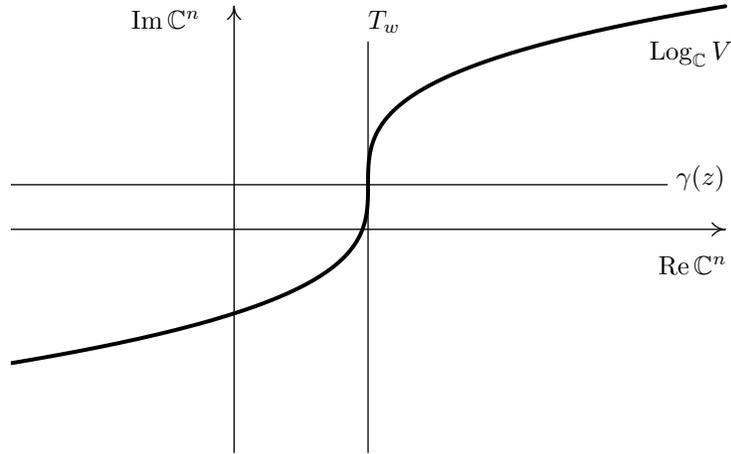


Fig.3.3

séparément les deux cas, signalons un détail important à propos des images des projections du plan tangent $T_w = T_w(\text{Log}_{\mathbb{C}} V)$ sur les sous-espaces réel et imaginaire de $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}_w^n$. Sans perdre de généralité, on peut prendre $w = 0$. Soient L_R et L_I les images des projections de T_0 sur ces sous-espaces réel et imaginaire ; il apparaît que ces images coïncident comme sous-espaces linéaires : $L_R = L_I$. En effet, supposons que T_0 soit défini par un système d'équations

$$T_0 : \langle \phi_j + i\psi_j, x + iy \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n - d,$$

où $\phi_j, \psi_j \in \mathbb{R}^n$, $x \in \operatorname{Re} \mathbb{C}_w^n$, et $y \in \operatorname{Im} \mathbb{C}_w^n$. Alors, en même temps qu'il contient le point (x, y) , le plan tangent T_0 contient aussi le point $(-y, x)$, donc $L_R = -L_I = L_I$.

Du fait que $T_0 \subset \pi_{\mathbb{R}^n}^{-1} L_R$ et $T_0 \subset \pi_{i\mathbb{R}^n}^{-1} L_I$, on déduit l'inclusion suivante

$$T_0 \subset L_R + iL_I = L_R + iL_R.$$

Les vecteurs $\phi_j + i\psi_j$ appartiennent au sous-espace normal en $\operatorname{Log}_{\mathbb{C}} z$ à $\operatorname{Log}_{\mathbb{C}} V$, donc à $\gamma(z)$, et il reste à analyser qu'ils sont réels. \square

§3.5. Contours des droites complexes

On considère ici la question de l'existence d'un contour pour les amibes des droites complexes. Étant donnée une telle droite V définie par

$$\begin{cases} z_2 = a_2 z_1 + b_2, \\ \dots \\ z_n = a_n z_1 + b_n, \end{cases} \quad (3.3)$$

où tous les a_j, b_j sont non nuls, on explicite ci-dessous une condition nécessaire pour que le contour de \mathcal{A}_V soit non vide en termes des coefficients a_j et b_j , $j = 1, \dots, n$.

La projection logarithmique de V est de la forme

$$\operatorname{Log}(z)|_V = (\log |z_1|, \log |a_2 z_1 + b_2|, \dots, \log |a_n z_1 + b_n|).$$

Sa matrice jacobienne est

$$\frac{\partial(\operatorname{Log})}{\partial(z_1, \bar{z}_1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1} & \frac{1}{\bar{z}_1} \\ \frac{a_2}{z_2} & \frac{\bar{a}_2}{\bar{z}_2} \\ \dots & \dots \\ \frac{a_n}{z_n} & \frac{\bar{a}_n}{\bar{z}_n} \end{pmatrix}$$

Soit

$$z_1 = x + iy, \quad \frac{b_j}{a_j} = c_j + id_j.$$

Un point $z_1 = x + iy$ est critique pour l'application logarithmique $\text{Log}|_V$ (c'est-à-dire, le rang de la matrice n'est pas maximal) si et seulement si

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & y \\ c_j & d_j \end{vmatrix} &= 0, \quad j = 2, \dots, n, \\ \begin{vmatrix} c_k & d_k \\ x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ c_l & d_l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_k & d_k \\ c_l & d_l \end{vmatrix} &= 0, \quad k, l = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Ce système est consistant si et seulement si $c_k d_l = c_l d_k$ pour tous $k, l = 2, \dots, n$. Cette dernière condition équivaut à la condition suivante :

$$\frac{a_k b_l}{a_l b_k} \in \mathbb{R}, \quad k, l = 2, \dots, n. \quad (3.4)$$

On en déduit ainsi la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Pour $n \geq 3$, le contour de l'amibe de la droite complexe (3.3) est non vide si et seulement si les conditions (3.4) sont satisfaites. Sous ces conditions le contour de l'amibe est l'image de la droite réelle $d_2 x = c_2 y$ par l'application Log .*

Regardons quelques exemples.

Exemple 3.1. La droite complexe

$$\begin{cases} z_2 = z_1 + 1, \\ z_3 = z_1 + 1 + i \end{cases}$$

de \mathbb{T}^3 ne remplit pas la condition (3.4); le contour de son amibe est donc vide. La projection logarithmique n'a aucun point critique et envoie la droite sur l'amibe de manière difféomorphe (voir la figure 3.4 de gauche). On dit dans ce cas que l'amibe \mathcal{A}_V est *non dégénérée*. En tout point de la droite, la valeur $\gamma(z)$ prise par l'application logarithmique de Gauss au point z admet un seul vecteur réel (voir la figure 3.5 de gauche).

Exemple 3.2. La droite complexe

$$\begin{cases} z_2 = z_1 + 1, \\ z_3 = z_1 + 2 \end{cases}$$

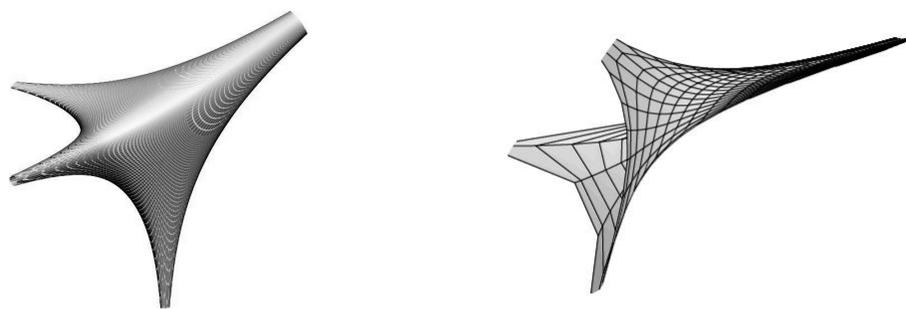


Fig. 3.4

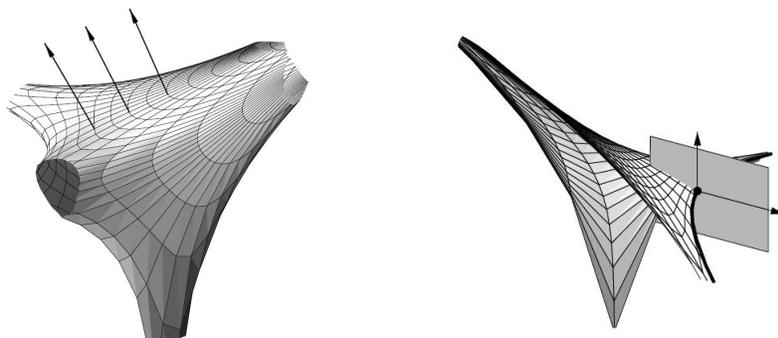


Fig. 3.5

de \mathbb{T}^3 satisfait cette fois (3.4) : $a_2 b_3 / (a_3 b_2) = 2 \in \mathbb{R}$. L'amibe est une surface de frontière dans \mathbb{R}^3 et chacun de ses points intérieurs a deux pré-images sur la droite. Plus précisément, pour tout $z_1 = x + iy$ non réel, les images

$$\text{Log}(z_1, z_1 + 1, z_1 + 2) \text{ et } \text{Log}(\bar{z}_1, \bar{z}_1 + 1, \bar{z}_1 + 2)$$

coïncident. La droite réelle $z_1 = x_1$ est envoyée sur le contour de l'amibe (sa frontière topologique), tandis que l'amibe elle-même s'obtient de l'amibe non dégénérée par « effondrement » (voir la figure 3.4, droite). Aux points du contour, l'image $\gamma(z)$ de z par l'application logarithmique de Gauss contient un plan de vecteur normal réel (voir la figure 3.5, droite).

§3.6. Amibes des strates singulières du discriminant classique

Quand $n > 1$, il existe un polynôme $\Delta = \Delta_n$ en les variables a qui est intimement à l'équation

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_{n-1} y^{n-1} + a_n y^n = 0 \quad (3.5)$$

(où les a_j sont considérés comme paramètres); ce polynôme sera de grande importance pour notre discussion ultérieure. On l'appelle le *discriminant* de l'équation (3.5). Il est « responsable » pour l'apparition de racines multiples pour l'équation (3.5) au sens suivant : $\Delta(a) = 0$ si et seulement si l'équation (3.5) possède au moins une racine multiple. Le discriminant Δ est un polynôme irréductible à coefficients entiers; il est défini uniquement au signe près et s'exprime en termes des racines r_1, r_2, \dots, r_n de l'équation suivant la formule

$$\Delta = \pm a_n^{2(n-1)} \prod_{j < k} (r_j - r_k)^2.$$

Suivant [12, Chapter 12], on prend comme convention de signe $(-1)^{n(n-1)/2}$. Le classique déterminant de Sylvester fournit une expression explicite pour le discriminant en termes des coefficients de l'équation

$$\Delta = \frac{1}{a_n} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_1 & 2a_2 & \dots & (n-1)a_{n-1} & n a_n & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & \dots & (n-2)a_{n-2} & (n-1)a_{n-1} & n a_n & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Pour $n = 2$, on trouve ainsi $\Delta = 4 a_0 a_2 - a_1^2$; pour $n = 3$, on obtient

$$\Delta = 27 a_0^2 a_3^2 + 4 a_1^3 a_3 + 4 a_0 a_2^3 - 18 a_0 a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_2^2.$$

Le nombre de termes impliqués dans Δ croît rapidement avec n , ainsi que les valeurs absolues des coefficients affectant les monômes y figurant. Pour $n = 4$, le discriminant présente 16 monômes, pour $n = 5$, on en trouve 59. Pour tout n , les monômes $n^n a_0^{n-1} a_n^{n-1}$ and $\pm a_1^2 a_2^2 \dots a_{n-1}^2$ figurent dans l'expression développée de Δ . Ils appartiennent à un ensemble de 2^{n-1} « termes extrémaux » du déterminant (on dira en quel sens plus loin) pour lesquels on disposera d'une formule combinatoire simple.

On notera ∇ le lieu des zéros du discriminant Δ . Géométriquement parlant cette hypersurface ∇ est la variété duale de la courbe de Véronèse paramétrée par $t \mapsto [1 : t : t^2 : \dots : t^n]$ dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. En d'autres termes, elle consiste en les vecteurs $a \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que l'hypersurface

$$a_0 z_0 + a_1 z_1 + \dots + a_n z_n = 0$$

correspondante n'est pas transverse à la courbe paramétrée

$$t \mapsto z(t) = [t^\nu ; \nu = 0, \dots, n].$$

On remarque que le discriminant Δ est un polynôme bi-homogène au sens suivant

$$\Delta(\lambda_0 a_0, \lambda_0 \lambda_1 a_1, \dots, \lambda_0 \lambda_1^{n-1} a_n) = \lambda_0^{2(n-1)} \lambda^{n(n-1)} \Delta_0(a).$$

Du fait de cette propriété, on peut se ramener à étudier le *discriminant réduit* correspondant à l'équation réduite

$$1 + x_1 y + \dots + x_{n-1} y^{n-1} + y^n = 0.$$

On notera par la suite ce discriminant réduit Δ_{0n} pour bien signaler le fait que l'on fixe les coefficients extrêmes a_0 et a_1 tous deux égaux à 1.

On notera ∇_{0n} le lieu discriminant de ce discriminant réduit, c'est-à-dire le sous-ensemble

$$\nabla_{0n} := \{x \in \mathbb{C}^{n-1} ; \Delta_{0n}(x) = 0\} \subset \mathbb{C}^{n-1}.$$

On posera

$$\alpha := (n-1, n-2, \dots, 1), \quad \beta = (1, 2, \dots, n-1).$$

La proposition suivante nous sera utile.

Proposition 3.2 ([23]). *Le lieu discriminant ∇_{0n} admet la paramétrisation suivante (que l'on notera $x = \Psi_{0n}(s)$, $s \in \mathbb{CP}^{n-2}$) :*

$$x_k = -n \frac{s_k}{\langle \alpha, s \rangle} \left(\frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{k/n}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad s \in \mathbb{CP}^{n-2}.$$

Cette paramétrisation réalise en fait l'inverse de l'application logarithmique de Gauss : $x \in \nabla_{0n} \mapsto \gamma(x) \in \mathbb{CP}^{n-1}$.

Dans cette sous-section, on étudiera les sous-ensembles $\mathcal{M}^j \subset \nabla$ consistant en les points $a \in \mathbb{C}^{n+1}$ pour lesquels l'équation (3.5) a des racines de multiplicité $\geq j$. La partie « dense » de \mathcal{M}^j consiste donc en les points a tels que le polynôme (3.5) se présente sous la forme $(y - \xi_0)^j (y - \xi_1) \cdots (y - \xi_{n-j-1})$, où $\xi_0, \dots, \xi_{n-j-1}$ are distinct.

Ces sous-ensembles constituent la chaîne de sous-ensembles emboîtés

$$\nabla = \mathcal{M}^2 \supset \mathcal{M}^3 \supset \dots \supset \mathcal{M}^n.$$

Tout sous-ensemble \mathcal{M}^{j+1} est inclus dans l'ensemble des points singuliers de \mathcal{M}^j noté $\text{sing } \mathcal{M}^j$; en même temps, la strate $S^j = \mathcal{M}^j \setminus \mathcal{M}^{j+1}$ consiste en les points où \mathcal{M}^j est soit singulière, soit auto-intersectée par ses composantes (ouvertes) de points réguliers. On appelle par conséquent \mathcal{M}^j la *strate singulière de type cuspidal*.

Théorème 3.3 ([19]). *Les strates $\mathcal{M}^2, \mathcal{M}^3, \dots, \mathcal{M}^n$ se réduisent au prix de substitutions monomiales à des A -ensembles discriminants⁴*

$$\nabla_{A_2}, \nabla_{A_3}, \dots, \nabla_{A_n}.$$

Des précisions sur le discriminant réduit et ses strates singulières s'obtiennent dans l'échelle logarithmique en termes du concept d'amibe de surface algébrique. Quand le sous-ensemble algébrique V est une hypersurface ou une courbe, on rappelle qu'un point régulier z de V est critique pour $\text{Log}|_V$ si et seulement si l'application logarithmique de Gauss est réelle au point z [18].

4. Soit $A \subset \mathbb{Z}^k$ un sous-ensemble fini engendrant \mathbb{Z}^k et $f = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha y^\alpha$ un polynôme à coefficients indéterminés a_α . On définit $\nabla_A^0 \subset \mathbb{C}^A$ comme le sous-ensemble des points où $f(y) = \{\text{gradient}_y(f)(y) = 0\}$ avec de plus $y \in \mathbb{TT}^n$. Le *sous-ensemble discriminant* ∇_A est défini comme l'adhérence de ∇_A^0 dans \mathbb{C}^A . Le théorème traduit donc l'existence d'une hiérarchie au sein de la famille des A -discriminants.

Ainsi le contour de l'amibe de ∇_{0n} s'obtient en restreignant l'application Ψ_{0n} au sous-espace projectif réel \mathbb{CP}^{n-2} ; ce contour est donc paramétré par $(\Psi_{0n})|_{\mathbb{RP}^{n-2}}$. De manière similaire, le contour de l'amibe correspondant à la strate \mathcal{M}_{0n}^{n-1} est paramétré par la restriction de la paramétrisation Ψ_{0n} à la section réelle $L^{n-3} \cap \mathbb{RP}^{n-2}$ de \mathbb{RP}^{n-2} par un sous-espace réel $L^{n-3} \subset \mathbb{RP}^{n-2}$ (voir [19]).

Considérons comme exemple le discriminant réduit ∇_{04} pour l'équation de degré 4. Sa strate \mathcal{M}_{04}^3 est paramétrée par la restriction de la paramétrisation

$$\Psi_{04} : \mathbb{CP}^2 \rightarrow \nabla_{04} \subset \mathbb{C}^3$$

à la droite complexe de ses points critiques

$$L^1 = L_1 = \{(s_1 : s_2 : s_3) : 1 \cdot 3 \cdot s_1 + 2 \cdot 2 \cdot s_2 + 3 \cdot 1 \cdot s_3 = 0\}.$$

Si l'on choisit s_1 comme coordonnée affine sur L^1 , on peut exprimer la restriction $\Psi_{04}|_{L^1}$ sous la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{8s_1}{3s_1 - 1} \left(\frac{3s_1 - 1}{3 - s_1} \right)^{\frac{1}{4}}, \\ x_2 &= 2 \frac{3s_1 + 3}{3s_1 - 1} \left(\frac{3s_1 - 1}{3 - s_1} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ x_3 &= -\frac{8}{3s_1 - 1} \left(\frac{3s_1 - 1}{3 - s_1} \right)^{\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

On déduit de la paramétrisation de la strate \mathcal{M}_{04}^3 que les tentacules de l'amibe de cette strate correspondent aux valeurs $s_1 = -\infty, -1, 0, 1/3, 3$. La valeur $s_1 = 1$ correspond à la strate 0-dimensionnelle \mathcal{M}_{04}^4 ; c'est un point critique de la paramétrisation. Ainsi, le contour de l'amibe de la strate 0-dimensionnelle \mathcal{M}_{04}^4 est le point de rebroussement (point cuspidal) pour le contour de l'amibe de la strate qui lui est adjacente, à savoir \mathcal{M}_{04}^3 . Tracer l'aspect des contours joints des amibes des strates $\mathcal{M}_{04}^2 = \nabla_{04}$ et \mathcal{M}_{04}^3 demande un peu de soin. En coordonnées affines s_1, s_2 dans l'espace \mathbb{CP}^2 la paramétrisation Ψ_{04} de $\mathcal{M}_{04}^2 = \nabla_{04}$ est d'après la proposition 3.2 la suivante :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-4s_1}{3s_1 + 2s_2 + 1} \left(\frac{3s_1 + 2s_2 + 1}{s_1 + 2s_2 + 3} \right)^{\frac{1}{4}}, \\ x_2 &= \frac{-4s_2}{3s_1 + 2s_2 + 1} \left(\frac{3s_1 + 2s_2 + 1}{s_1 + 2s_2 + 3} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ x_3 &= \frac{-4}{3s_1 + 2s_2 + 1} \left(\frac{3s_1 + 2s_2 + 1}{s_1 + 2s_2 + 3} \right)^{\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

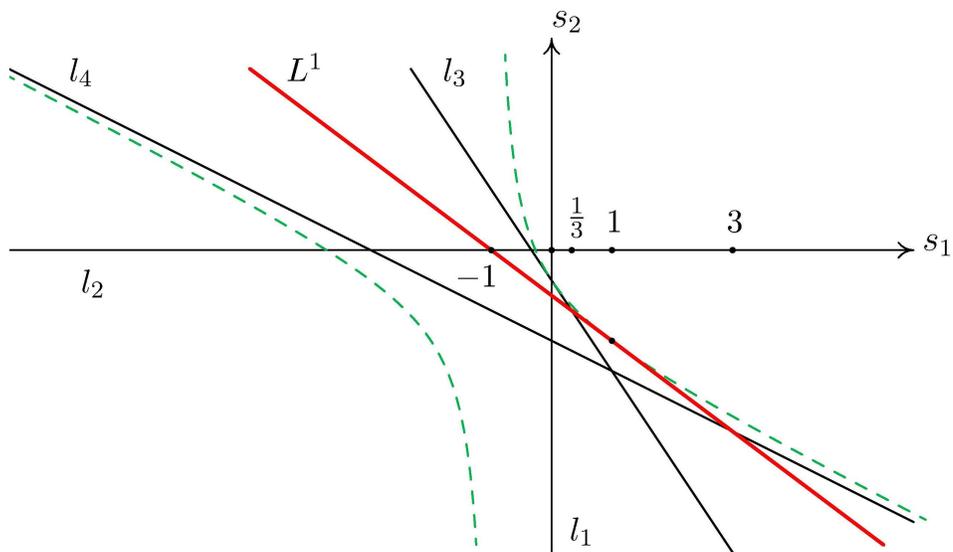


Fig. 3.6. Singularités de la paramétrisation Ψ_{04} : quatre lignes polaires, la ligne critique et l'hyperbole d'auto-intersections

Pour construire le contour de l'amibe, il faut calculer l'image de $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{RP}^2$ sous l'application $\text{Log} \circ \Psi_{04}$. Cette application présente des singularités polaires sur quatre droites (la cinquième droite $s_3 = 0$ est à l'infini relativement au choix de sa partie affine),

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad 3s_1 + 2s_2 + 1 = 0, \quad s_1 + 2s_2 + 3 = 0$$

que l'application $\text{Log} \circ \Psi_{04}$ transforme en le contour de l'amibe de \mathcal{M}_{04}^3 . L'image de l'hyperbole complexe $\{(s_1 + 1)(s_1 + 2s_2 + 3) = 2\}$ par Ψ_{04} est la strate $\mathcal{M}_{04}^{2,2}$ responsable de l'existence de deux racines toutes les deux de multiplicité 2. En d'autres termes, cette strate $\mathcal{M}_{04}^{2,2}$ consiste en les points (x_1, x_2, x_3) pour lesquels les polynômes

$$1 + x_1y + x_2y^2 + x_3y^3 + y^4 \quad \text{et} \quad (y - a)^2(y - b)^2 \quad (a = b)$$

sont égaux pour un certain choix de paramètres a, b . Cette strate est dite strate d'« auto-intersection ». Posons $t = a + b$ et paramétrisons alors cette strate par

$$x_1 = \mp 2t, \quad x_2 = t^2 \pm 2, \quad x_3 = -2t.$$

L'ensemble $\mathcal{M}_{04}^{2,2}$ constitue la strate d'auto-intersection pour l'ensemble discriminant ∇_{04} . La restriction de la paramétrisation Ψ_{04} sur l'hyperbole spécifiée prend les mêmes valeurs aux points $(s_1, s_2), (s'_1, s'_2)$ pour lesquels $s_1 \cdot s'_1 = 1$.

Sur la figure 3.7, on a affiché un fragment de lien entre le contour de l'amibe de ∇_{04} et le contour de l'amibe de sa strate \mathcal{M}_{04}^3 . On voit que le contour de l'amibe de la strate \mathcal{M}_{04}^3 est la courbe de rebroussement pour le contour de l'amibe de ∇_{04} . Près du point (de rebroussement) du contour de l'amibe \mathcal{M}_{04}^3 correspondant à la valeur $s_1 = 1$ dans la paramétrisation du contour, la jonction se présente sous la forme d'une figure bien connue dite « swallow tail »⁵. Cette figure possède la courbe d'auto-intersection issue du point de rebroussement et figure un morceau du contour de l'amibe de la strate d'auto-intersection $\mathcal{M}_{04}^{2,2}$. Elle est réalisée comme une partie du contour de l'amibe de ∇_{04} , pour laquelle les paramètres réels s_1 et s_2 appartiennent à un voisinage convenable de $L^1 \cap \{s_1 > 0\}$.

5. La traduction française n'est pas évidente : le modèle auquel on peut penser est celui des ailes du papillon dit machaon ou « queue d'hirondelle »

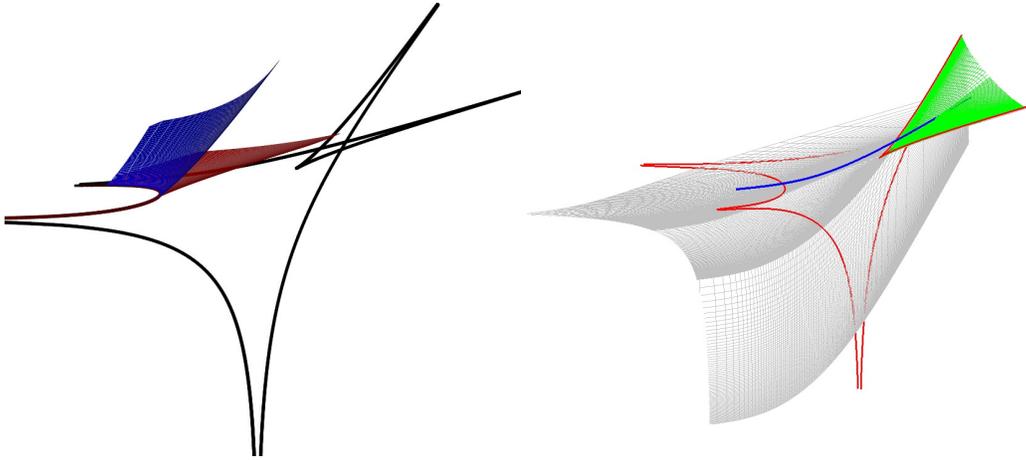


Fig. 3.7. Fragment de lien du contour de l'amibe de ∇_{04} au contour de l'amibe de la strate \mathcal{M}_{04}^3



Un machaon

§3.7. Amibes des ensembles discriminants pour les transformations polynomiales de \mathbb{C}^n

Considérons l'application polynomiale

$$P = (P_1, \dots, P_n) : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}^n,$$

où $\mathbb{T}^n = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ est le tore complexe et les P_j sont des polynômes de Laurent en les variables y_1, \dots, y_n .

On suppose que les ensembles $A^{(j)}$ des exposants des monômes de chaque P_j sont prescrits, mais que les coefficients qui les affectent sont indéterminés. En ce sens, on peut dire que P_j est une application polynomiale générique (de support $A^{(j)}$) de \mathbb{T}^n dans \mathbb{C}^n .

Pour de telles applications, on note le lieu des coefficients indéterminés pour lesquels P a des zéros multiples dans \mathbb{T}^n (c'est-à-dire des zéros où le jacobien s'annule) par $\nabla^{(0)}$.

Définition 3.4. On appelle *lieu discriminant* ∇ de l'application polynomiale P l'adhérence de l'ensemble $\nabla^{(0)}$ dans l'espace des coefficients indéterminés.

On s'intéresse donc ici aux systèmes d'équations polynomiales de la forme

$$\sum_{\lambda \in A^{(j)}} a_\lambda^{(j)} y^\lambda = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

en les inconnues $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{T}^n$ avec coefficients indéterminés $a_\lambda^{(j)}$. Ici les $A^{(j)} \subset \mathbb{Z}^n$ sont des sous-ensembles finis du réseau \mathbb{Z}^n $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $y^\lambda = y_1^{\lambda_1} \dots y_n^{\lambda_n}$.

Pour $n = 1$, quand $A^{(1)} = \{0, 1, \dots, m\}$, le système (3.6) figure l'équation générale algébrique de degré n

$$a_m y^m + \dots + a_1 y + a_0 = 0, \quad (3.7)$$

dont la solution est une fonction algébrique multivaluée $y(a)$ possédant une double propriété d'homogénéité. À une transformation monomiale près, elle ne dépend que de $n - 1$ variables et l'on peut donc se ramener à considérer l'équation réduite de la forme

$$y^m + a_{m-1} y^{m-1} + \dots + a_1 y - 1 = 0$$

ou toute équation obtenue à partir du système (3.7) en fixant une paire de coefficients.

Nous allons illustrer ici ce que l'on gagne à définir les lieux discriminants en les paramétrant plutôt que par un jeu d'équations. On entend parler ici de la localisation des lieux discriminants que nous considérerons dans l'échelle logarithmique, c'est-à-dire en fait l'étude de leurs amibes.

§3.8. Exemples de paramétrisations du discriminant d'un système algébrique

Exemple 3.3. Soit le système

$$\begin{cases} y_1^3 + ay_1y_2 - 1 = 0, \\ y_2^3 + by_1y_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Pour ce système la paramétrisation $\Delta(s)$ du lieu discriminant est de la forme

$$\begin{aligned} a &= -\frac{3}{-2+s} \left(\frac{s-2}{1+s}\right)^{1/3} \left(\frac{1-2s}{1+s}\right)^{1/3}, \\ b &= -\frac{3s}{1-2s} \left(\frac{s-2}{1+s}\right)^{1/3} \left(\frac{1-2s}{1+s}\right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

En ajoutant à ce système le jacobien, puis en éliminant les variables y_1, y_2 , on obtient la puissance $(D(a, b))^3$ du polynôme irréductible

$$D(a, b) = -27 - 4a^3 + 6a^2b + 6ab^2 - 4b^3 + a^4b^2 - 2a^3b^3 + a^2b^4,$$

dont le lieu des zéros est précisément ∇ . On obtient le même résultat en éliminant s de (3.8). La raison pour laquelle la puissance 3 apparaît vient de la théorie de l'élimination car l'on prend en compte les multiplicités. Dans ce cas, la multiplicité est aussi l'indice du sous-réseau engendré par les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire la matrice des exposants qui apparaissent dans le système (l'indice est le plus grand diviseur commun de tous les mineurs du second ordre de la matrice). Le revêtement à 9 feuillets paramètre (3.8) $\nabla = D^{-1}(0)$ trois fois. Toutes les autres déshomogénéisations du discriminant possèdent

cette propriété. Aussi l'application logarithmique de Gauss pour le système considéré n'est pas rationnelle.

La figure 3.8 présente l'amibe du discriminant ∇ , les lignes en gras figurant le contour de cette amibe. On voit que la normale au contour de l'amibe lors du tracé fait un tour complet (c'est-à-dire décrit \mathbb{RP}_1), mais $\text{Log}^{-1}(x)$ consiste en trois points de ∇ correspondant aux différentes déterminations des racines.

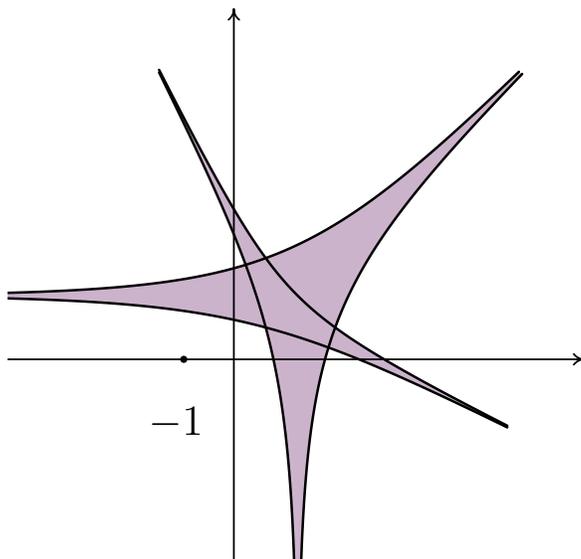


Fig. 3.8. L'amibe et son contour

Exemple 3.4. Considérons le système

$$\begin{cases} y_1^3 + ay_1y_2^3 - 1 = 0, \\ y_2^3 + by_1^3y_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Pour ce système, la paramétrisation du lieu discriminant est de la forme

$$\begin{cases} a = -\frac{3}{(3s-2)(3+s)} \left(\frac{3s-2}{1+3s}\right)^{1/3} (3-2s), \\ b = -\frac{3s}{(3-2s)(1+3s)} \left(\frac{3-2s}{3+s}\right)^{1/3} (3s-2). \end{cases}$$

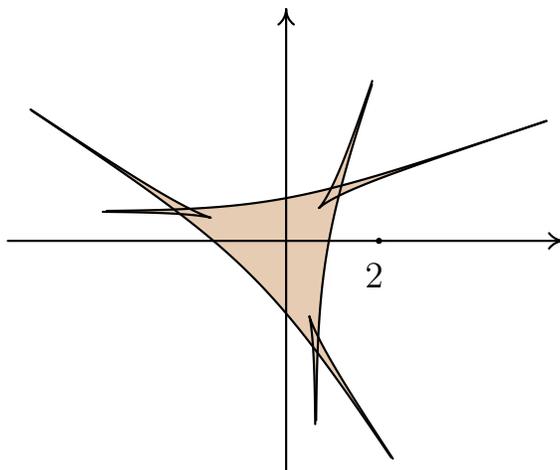


Fig. 3.9. L'amibe et son contour

Si l'on élimine le paramètre s , on obtient un polynôme irréductible en deux variables a, b (le discriminant) :

$$\begin{aligned}
D(a, b) = & \\
= & 538084012500 a^3 - 144397834110000 b^3 a^3 - 2514840354180 a^9 b^{15} - \\
& -286152818688 a^{15} b^{12} - 2514840354180 a^{15} b^9 - 286152818688 a^{12} b^{15} + \\
& +169697169169308 a^6 b^{15} - 5397324579198736 a^9 b^9 + \\
& +4162327695194184 a^9 b^6 + 4162327695194184 a^6 b^9 + \\
& +169697169169308 a^{15} b^6 - 9691069938750 a^9 b^3 - 9691069938750 a^3 b^9 + \\
& +7703415106497 a^{18} b^6 + 7703415106497 a^6 b^{18} - 12230590464 a^{15} b^{15} - \\
& -480298005000 a^3 b^{12} + 1325964214525104 a^6 b^{12} - 59911047139356 a^{12} b^9 + \\
& +1325964214525104 a^{12} b^6 - 59911047139356 a^9 b^{12} - 480298005000 a^{12} b^3 - \\
& -65024906422500 a^6 b^3 - 65024906422500 a^3 b^6 + 3794714164806300 a^6 b^6 + \\
& +3936600000 b^9 - 6736036523130 a^{12} b^{12} + 3936600000 a^9 + \\
& +79716150000 b^6 + 79716150000 a^6 + 538084012500 b^3 + 1210689028125.
\end{aligned}$$

Il est évident qu'à partir d'une telle équation, il est certainement difficile de tracer l'amibe de son lieu de solutions.

§4 Amibes et mathématiques tropicales

La théorie des amibes est étroitement reliée au développement de la géométrie algébrique *tropicale*, c'est-à-dire la géométrie des ensembles algébriques pensés sous l'angle de arithmétique tropicale (dite aussi *arithmétique* « *max-plus* »). Les mathématiques tropicales (c'est-à-dire construites sur le socle de l'arithmétique tropicale) sont au carrefour de la combinatoire, de l'informatique et de la théorie de l'information, ainsi que de la thermodynamique. Lorsque l'on travaille avec de grands (ou très petits) nombres, il est souvent utile d'exploiter une arithmétique différente de l'arithmétique classique. L'une d'elles (que l'on convient d'appeler l'arithmétique « *max-plus* ») est apparue en théorie asymptotique (en physique) dans les travaux de V.P. Maslov et de son groupe autour des années 1990.

Plus tard, l'usage de cette arithmétique s'est avéré commode dans les questions d'affichage d'écran (*screen output*) en informatique, d'analyse par intervalles en mathématiques, etc.

On note que l'arithmétique « *max-plus* » s'est appelée à l'origine « analyse idempotente » ($\max(a, a) = a$) et, plus tard, une fois entrée dans le monde de l'informatique, prit de nom de « géométrie tropicale ». Ce nom est hérité des travaux du mathématicien et informaticien brésilien Imre Simon qui fait beaucoup de publicité précisément pour ces méthodes « *max-plus* »; lorsqu'en effet ces méthodes essaimèrent dans les communautés mathématique européenne et américaine, on les qualifia de « tropicales ». Quant au terme « géométrie », il reflète le fait que l'on accorda beaucoup d'attention aux problèmes de géométrie algébrique formulés sous l'angle de cette arithmétique.

Rappelons que traditionnellement en géométrie algébrique, on s'intéresse aux solutions de systèmes d'équations algébriques (c'est-à-dire polynomiales). Dans un cours d'université standard, ce genre de question relève de la géométrie analytique, où les principaux objets d'étude sont les droites, les plans, les courbes et les surfaces du econd ordre (ellipse, ellipsoïde, hyperbole, hyperboloïde, etc.).

Dans les dernières années, la géométrie tropicale est devenue objet d'intérêt en physique mathématique (théorie des super-cordes, modèles dimères) ainsi qu'en biologie mathématique.

C'est grâce à des idées relevant de la géométrie tropicale que fut résolu

le problème (posé depuis 1906) de la classification des types d'isotopie des courbes de Harnack [18].

§4.1. Géométrie algébrique tropicale

Cette section suit la présentation de [25].

Arithmétique tropicale

La somme tropicale de deux nombres réels est leur maximum, tandis que le produit tropical de ces deux nombres est leur somme. Les opérations tropicales s'écrivent comme suit :

$$x \oplus y = \max\{x, y\}, \quad x \odot y = x + y.$$

Par exemple, la somme tropicale de 100 et 25 vaut 100. Le produit de 1 et -1 vaut 0, soit

$$100 \oplus 25 = \max\{100, 25\} = 100, \quad 1 \odot (-1) = 1 - 1 = 0.$$

On peut aisément dresser des tables d'addition et de multiplication.

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc} \oplus & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c|cccccccc} \odot & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 7 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{array} \right).$$

La multiplication tropicale est définie comme étant l'addition usuelle, aussi tous les axiomes de groupe sont remplies pour la multiplication tropicale. L'élément neutre pour cette multiplication est 0 du fait que $0 \odot x = 0 + x = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et l'inverse de x pour cette multiplication est $-x$. Observons que l'élément neutre pour l'addition tropicale \oplus n'est pas 0 (puisque le résultat de l'addition tropicale $x \oplus 0$ dépend du signe de x) mais $-\infty$ (que l'on convient d'ajouter à \mathbb{R}). On montre facilement que le système $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$ est un semi-anneau.

On observe que si l'on pose

$$x \oplus_N y := \frac{1}{N} \log(e^{xN} + e^{yN}),$$

on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (x \oplus_N y) = \max(x, y).$$

C'est sur cette idée que repose le calcul de Maslov (dans l'optique de la thermodynamique).

Polynômes tropicaux et leurs graphes

Soient x_1, x_2, \dots, x_n n variables prenant leurs valeurs dans le semi-anneau tropical.

On appelle *monôme tropical* le produit tropical d'un coefficient et de puissances tropicales des variables x_i .

$$a_{\mathbf{i}} \odot x^{\odot \mathbf{i}} = a_{i_1 \dots i_n} \odot x_1^{\odot i_1} \odot \dots \odot x_n^{\odot i_n},$$

où $a_{i_1 \dots i_n} \in \mathbb{R}$; $i_k \in \mathbb{Z}, k = 1, \dots, n$. La fonction monomiale (tropicale) correspondante est une fonction $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$a_{\mathbf{i}} \odot x^{\odot \mathbf{i}} \rightarrow \langle \mathbf{i}, x \rangle + a_{\mathbf{i}} = i_1 x_1 + \dots + i_n x_n + a_{\mathbf{i}}.$$

Par exemple

$$x_1^{\odot 2} \odot x_2^{\odot 3} \odot x_3^{\odot 2} \odot x_4 \rightarrow 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4$$

$$x_1^{\odot 2} x_2^{\odot 2} \rightarrow -2x_1 + 2x_2.$$

Ainsi, du point de vue des mathématiques classiques, les fonctions monomiales tropicales en n variables tropicales sont juste les fonctions linéaires dans \mathbb{R}^n , à pente dans \mathbb{Z}^n .

Définition 4.1. On appelle fonction polynomiale tropicale une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} qui du point de vue des mathématiques classiques se présente comme le maximum d'un nombre fini de fonctions affines :

$$p_t(x) = \max\{a_{\mathbf{i}^1} + \langle x, \mathbf{i}^1 \rangle; a_{\mathbf{i}^2} + \langle x, \mathbf{i}^2 \rangle; \dots; a_{\mathbf{i}^p} + \langle x, \mathbf{i}^p \rangle\}, \quad (4.1)$$

où $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{i}^k = (i_1^k, \dots, i_n^k) \in \mathbb{Z}^n$.

Exemple 4.1. En deux variables par exemple

$$p(x_1, x_2) = \bigoplus_{k=1}^p a_{i^k} \odot x_1^{\odot i_1^k} \odot x_2^{\odot i_2^k}$$

où $a_i^k \in \mathbb{R}$, $i_n^k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, \dots, n$.

Toute fonction polynomiale tropicale possède les trois propriétés suivantes :

1. p est continue ;
2. p est convexe ; comme p est déjà continue, la convexité se ramène à la clause

$$p\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{p(x)+p(y)}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

3. p affine par morceaux, à pentes dans \mathbb{Z}^n , le nombre de « morceaux » étant fini ;

Toute fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} satisfaisant ces trois propriétés se représente comme une fonction polynomiale tropicale.

Considérons par exemple le graphe de la fonction polynomiale cubique en une variable

$$p_t(x) = a \odot x^3 \oplus b \odot x^2 \oplus c \odot x \oplus d,$$

représentée sur la figure 4.1. Les valeurs de $p_t(x)$ s'obtiennent en prenant le maximum des quatre fonctions affines

$$y = 3x + a, y = 2x + b, y = c + x, y = d.$$

Plus précisément la valeur $p_t(x)$ est la valeur maximale y telle que le point (x, y) appartiennent aux quatre droites ainsi définies. Ainsi, le graphe de p_t est l'enveloppe supérieure des graphes de ces quatre fonctions affines. Ces quatre fonctions ont un impact sur le fait de savoir si $b - a > c - b > d - c$. Les points $x = b - a$, $x = c - b$, $x = d - c$ sont les points au dessus duquel le graphe se prise (c'est-à-dire n'est plus le graphe d'une fonction affine).

Les points de « brisure » sont considérés comme les « racines » du polynôme tropicale que la fonction polynomiale tropicale représente. Ceci peut au premier abord paraître curieux. Néanmoins, si l'on se souvient du graphe de la fonction de Jensen (section 2.1), où la fonction de Jensen

$$x \longmapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})} \log |P(e^{x+i\theta})| d\theta$$

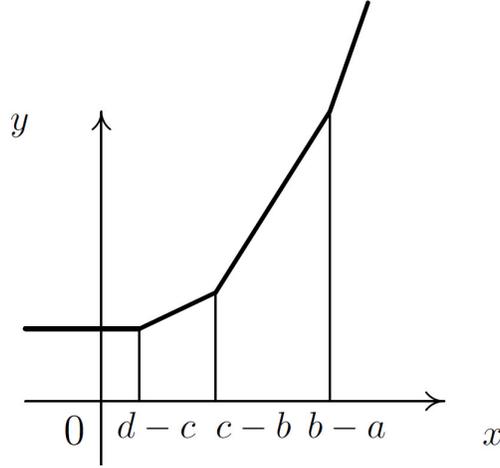


Fig. 4.1. Le graphe de la fonction polynomiale tropicale d'une variable (4.3)

est aussi continue affine par morceaux avec nœuds en chaque $\log |\xi|$ où ξ est une racine de P , le fait précédent devient assez naturel. C'est en ce sens que l'on peut définir le « lieu des zéros » d'une fonction polynomiale tropicale, lieu que l'on qualifera d'*hypersurface tropicale*.

Définition 4.2 (hypersurface tropicale [25]). *L'hypersurface tropicale $V(p_t)$ est le sous-ensemble de \mathbb{R}^n constitué des points x de \mathbb{R}^n où le maximum des formes affines impliquées dans une représentation de p_t est atteint en au moins deux fonctions affines distinctes impliquées dans la prise de maximum réalisant la fonction polynomiale p_t ⁶.*

Exemple 4.2. Soit $n = 2$. Une fonction polynomiale tropicale se présente alors comme

$$p(x_1, x_2) = \bigoplus_{k=1}^p a_{\mathbf{i}^k} \odot x^{\odot i_k} \odot y^{\odot j_k} \quad (\mathbf{i}^k = (i_k, j_k)). \quad (4.2)$$

Une courbe tropicale correspondant à l'exemple (4.2) est dite *courbe tropicale plane*.

La proposition suivante décrit les propriétés caractéristiques d'une telle courbe.

6. En d'autres termes $x \in V(p_t)$ si et seulement si p_t n'est pas identiquement une fonction affine au voisinage de x .

Proposition 4.1. *La courbe tropicale $V(p_t)$ se présente comme un graphe fini plongé dans le plan \mathbb{R}^2 . Il a des arêtes bornées (dits segments) et non bornées (ce sont alors des demi-droites), de pentes toujours des nombres rationnels.*

Soit maintenant p_t un polynôme tropical x and y et tous les sommants $a_{\mathbf{i}} \odot x^{\odot i} \odot y^{\odot j}$ présents dans une représentation de p_t . En arithmétique « classique » chaque sommant est une fonction affine $a_{\mathbf{i}k} + i_k x + j_k y$ de (x, y) . La fonction tropicale polynomiale correspondant à l'« évaluation » de p_t assigne au point $x \in \mathbb{R}^n$ le maximum des fonctions affines impliquées dans la représentation de p_t .

Exemple 4.3. Le graphe de la courbe tropicale V_t définie comme le « lieu des zéros » (au sens ci-dessus) de la fonction polynomiale

$$p(x, y) = 2 \odot x^{\odot 2} \oplus 0 \odot x \odot y \oplus 2 \odot y^{\odot 2} \oplus 0 \odot x \oplus y \oplus 0. \quad (4.3)$$

Il est représenté sur la figure 4.1. En accord avec la définition 4.2,

$$p(x, y) = \max\{2 + 2x, x + y, 2 + 2y, x, y, 2\}.$$

Afin de construire le graphe défini ainsi, on doit, pour toute paire d'indices $\{\mathbf{i}^* = (i^*, j^*), \mathbf{i}' = (i', j')\}$, résoudre un système d'équations ou d'inéquations, à savoir

$$a_{\mathbf{i}^*} + i^* x_1 + j^* x_2 = a_{\mathbf{i}'} + i' x_1 + j' x_2 \geq a_{\mathbf{i}} + i x + j x_2,$$

où $\mathbf{i} = (i, j) \in \text{Supp}_{p_t}$ (support du polynôme p_t , c'est-à-dire multi-exposant impliqué dans la représentation de p_t). La solution de ce système est soit un point, soit un segment, soit une demi-droite, soit l'ensemble vide. L'union de tous les ensembles ainsi construits est la courbe tropicale représentée sur la figure 4.2.

Comment construire une courbe tropicale à partir d'une subdivision du polyèdre de Newton ?

Lorsque $n = 2$, il existe un moyen plus effectif de construire le graphe d'une fonction polynomiale tropicale en se basant sur la subdivision du polyèdre de Newton attaché au polynôme tropical que cette fonction représente.

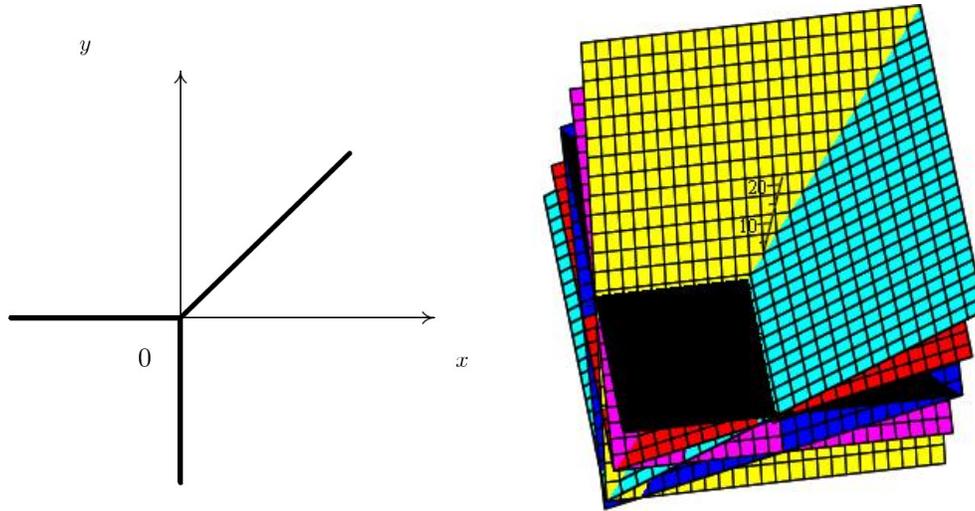


Fig. 4.2. Courbe et graphe de la fonction polynomiale tropicale (4.3)

Définition 4.3. Le polyèdre de Newton Δ_p d'un polynôme tropical $p_t(x)$ de la forme (4.2) (dans cet exemple avec $n = 2$) est l'enveloppe convexe des exposants $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$ des monômes $x^{\mathbf{i}}$ impliqués dans l'expression de $p_t(x)$.

Si précisément $n = 2$, on appelle Δ_{p_t} aussi le polygone de Newton. On introduit la notion de *subdivision du polygone de Newton* Δ_{p_t} comme suit. À chaque monôme tropical $a_i \odot x^i y^j$ figurant dans l'expression de $p_t(x)$, on associe le point (i, j, a_i) de \mathbb{R}^3 . On considère ensuite l'enveloppe convexe de tous les points (i, j, a_i) ainsi construits et la projection

$$\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (i, j, a_i) \rightarrow (i, j).$$

L'image de cette projection fournit précisément le polygone de Newton Δ_{p_t} avec la subdivision voulue.

Théorème 4.1. La courbe tropicale V_{p_t} est duale à la subdivision du polygone de Newton Δ_{p_t} ainsi réalisée au sens suivant : les arêtes de la courbe sont orthogonales aux côtés du polygone tandis que les segments de cette courbe sont orthogonaux aux segments intérieurs impliqués dans cette subdivision de polygone de Newton.

Exemple 4.4. Soit un polynôme tropical de degré un

$$p_t(x, y) = A \odot x \oplus B \odot y \oplus C$$

Son polygone de Newton est représenté sur la figure 4.3. Il n'est pas ici subdivisé (la subdivision ne présente pas de segments autres que les faces de dimension 1 du polygone de Newton).

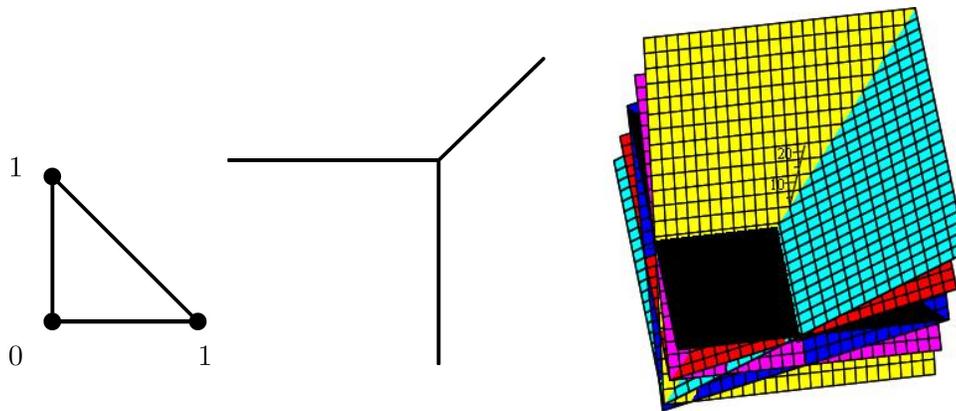


Fig. 4.3. Subdivision de Δ_{p_t} , la courbe V_{p_t} et son graphe, lorsque le polynôme tropical est $p_t(x, y) = A \odot x \oplus B \odot y \oplus C$

Une subdivision de Δ_{p_t} faisant apparaître des segments autres que les faces de dimension 1 de Δ_{p_t} n'est possible que si Δ_{p_t} présente des points intérieurs autres que ses sommets.

Exemple 4.5. Soit un polynôme tropical du second degré

$$p_t(x, y) = a \odot x^{\odot 2} \oplus b \odot y^{\odot 2} \oplus c \odot x \odot y \oplus d \odot y \oplus e \odot x \oplus f = 0. \quad (4.4)$$

Du point de vue de l'arithmétique classique, ce polynôme définit la fonction (polynomiale tropicale) affine par morceaux

$$\max\{a + 2x; b + 2y; c + x + y; d + x, e + y, f\}.$$

Le polygone de Newton du polynôme (4.4) est un triangle ayant des points à coordonnées entières (autres que les sommets) sur ses faces de dimension un. Suivant les valeurs des coefficients, il y a onze types de courbe tropicale. On en a représenté quelques uns sur les figures 4.5 et 4.6.

On peut aisément construire une courbe tropicale à l'aide du logiciel de calcul symbolique `Maple`. Pour tracer un graphe tropical sous `Maple`, il est

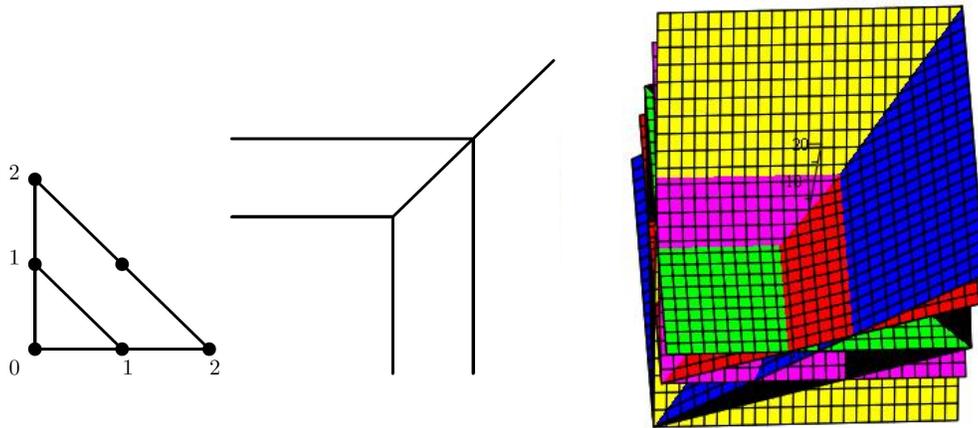


Fig. 4.5. Subdivision de Δ_p , la courbe tropicale $V(p_t)$ et son graphe lorsque le polynôme tropical est $p(x, y) = x^{\odot 2} \oplus x \odot y \oplus y^{\odot 2} \oplus 2 \odot x \oplus 2 \odot y \oplus 2$

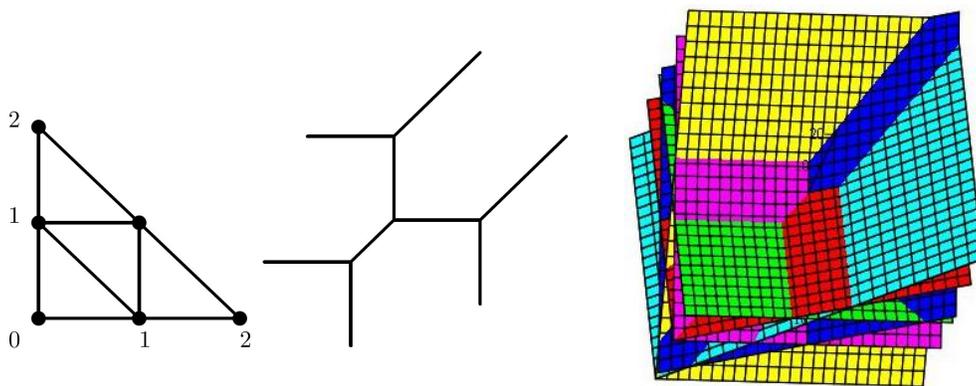
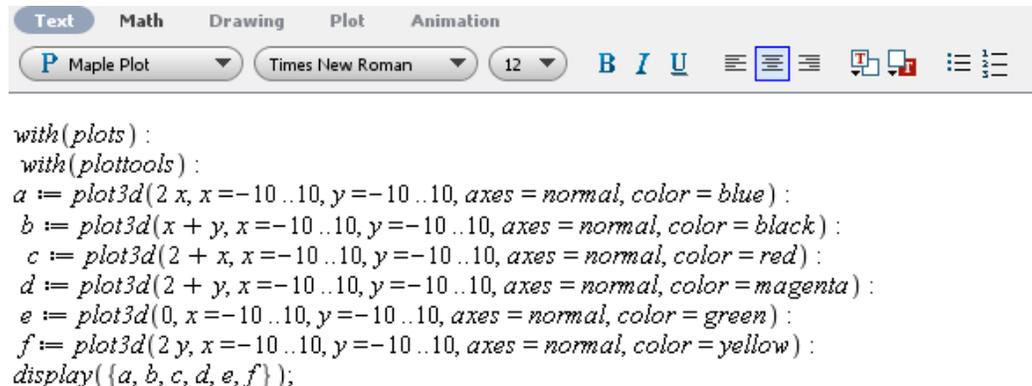


Fig. 4.6. Subdivision de Δ_p , la courbe tropicale $V(p_t)$ et son graphe lorsque le polynôme tropical est $p(x, y) = 0 \odot x^{\odot 2} \oplus 2 \odot x \odot y \oplus 0 \odot y^{\odot 2} \oplus 2 \odot x \oplus 2 \odot y \oplus 0$

nécessaire de charger au préalable les bibliothèques `plots` et `plottools`. On utilise ensuite la fonction `plot3d` de la bibliothèque `plots`, dans laquelle il est nécessaire de rentrer en l'encodant à la fois la fonction polynomiale tropicale dont on souhaite tracer le graphe ainsi que le domaine en x, y au dessus duquel on souhaite réaliser cette représentation.



```

with(plots) :
with(plottools) :
a := plot3d(2 x, x=-10..10, y=-10..10, axes = normal, color = blue) :
b := plot3d(x + y, x=-10..10, y=-10..10, axes = normal, color = black) :
c := plot3d(2 + x, x=-10..10, y=-10..10, axes = normal, color = red) :
d := plot3d(2 + y, x=-10..10, y=-10..10, axes = normal, color = magenta) :
e := plot3d(0, x=-10..10, y=-10..10, axes = normal, color = green) :
f := plot3d(2 y, x=-10..10, y=-10..10, axes = normal, color = yellow) :
display({a, b, c, d, e, f});

```

Fig. 4.7. Le tracé du graphe sous Maple13 lorsque le polynôme tropicale est $p(x, y) = x^{\odot 2} \oplus y^{\odot 2} x \odot y \oplus 2 \odot x \oplus y \oplus 0$

Pour tracer des surfaces, on utilise la commande

`plot3d(expr, x=a ... b , y=c ... d, options)`

où `expr` est la fonction polynomiale tropicale dont on entend tracer le graphe, `x=a...b` précise le domaine des abscisses et `y=c...d` celui des ordonnées. Comme `options`, on peut modifier les axes de coordonnées (`axis`), l'affichage en couleurs du graphe (`color`), la grille planaire (`grid`) et ainsi de suite. Pour superposer les graphes, il faut exploiter la fonction `display`.

Le squelette d'une amibe candidat à être une hypersurface tropicale

À l'amibe \mathcal{A}_f d'une hypersurface complexe, on peut associer deux hypersurfaces réelles incluses dans \mathcal{A}_f , à savoir le *squelette* de l'amibe et son *contour*. Supposons que $A' \subset \mathbb{R}^n \cap \Delta_f$ soit l'ensemble des points α de $\mathbb{Z}^n \cap \Delta_f$ pour lesquels de complémentaire de l'amibe \mathcal{A}_f , définie par le polynôme de Laurent

f , présente une composante connexe de multiplicité α . Rappelons que A' contient nécessairement tous les sommets du polyèdre de Newton Δ_f .

Pour chaque $\alpha \in A'$ on définit un nombre réel a_α par

$$a_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\text{Log}^{-1}(x)} \log \left| \frac{f(z)}{z^\alpha} \right| \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{z_1 \cdot \dots \cdot z_n}, \quad (4.5)$$

où $x \in E_\alpha$. Si α est un sommet du polyèdre de Newton Δ_f alors

$$a_\alpha = \log |c_\alpha|, \quad (4.6)$$

mais en général a_α dépend des coefficients $\{c_\alpha\}$ du polynôme f de manière très imbriquée.

Considérons la fonction affine par morceaux $S_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$S_f(x) = \max_{\alpha \in A'} \{ \langle \alpha, x \rangle + a_\alpha \}, \quad (4.7)$$

où les a_α sont calculés par les formules (4.5) ou (4.6).

Définition 4.4 ([22]). *Le sous-ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ au voisinage desquels la fonction $S_f(x)$ n'est pas régulière s'appelle squelette de l'amibe A_f .*

Comme $S_f(x)$ est une fonction affine par morceaux que l'on peut comprendre comme une fonction polynomiale tropicale, cette définition équivaut à dire que le maximum dans (4.7) est atteint par au moins deux des fonctions affines $\{ \langle \alpha, x \rangle + a_\alpha \}$.

Théorème 4.2 ([22]). *Le squelette de l'amibe A_f est un rétract au sens fort par déformation de l'amibe A_f .*

La fonction S_f est la fonction polynomiale tropicale associée au polynôme tropical

$$S_f(x) = \bigoplus_{\alpha \in A'} a_\alpha \odot x^{\odot \alpha}.$$

Alors le squelette de l'amibe d'une hypersurface s'interprète comme une hypersurface tropicale dont construction et étude relèvent alors de la géométrie tropicale algébrique.

Dans le cas $n = 2$, le squelette de l'amibe est une courbe tropicale de \mathbb{R}^2 consistant en demi-droites et segments (voir les figures 4.7 à 4.9). Il est possible de prédire l'allure de cette courbe à partir de la subdivision du polygone de Newton. Mais il convient toutefois pour cela de connaître la valeur précise des coefficients a_α impliqués dans la définition de la fonction polynomiale tropicale S_f , coefficients dont on sait qu'ils sont reliés au polynôme de Laurent de manière en général subtile par la relation (4.5). Calculer ces coefficients a_α s'avère en règle générale un difficile problème.

Exemples d'amibes de courbes complexes avec leur squelette

Exemple 4.6. L'exemple classique et le plus simple d'amibe d'hypersurface est celui de la droite complexe donnée comme le lieu des zéros dans \mathbb{T}^2 du polynôme de Laurent $f(z) = az + bw + c$. Le polygone de Newton Δ_f ne contient dans ce cas aucun autre point à coordonnées entières que ses sommets (c'est un triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$) et le complémentaire de l'amibe \mathcal{A}_f ne présente dans ce cas que trois composantes connexes E_{00} , E_{10} , E_{01} ; son squelette est représenté sur la figure 4.7.

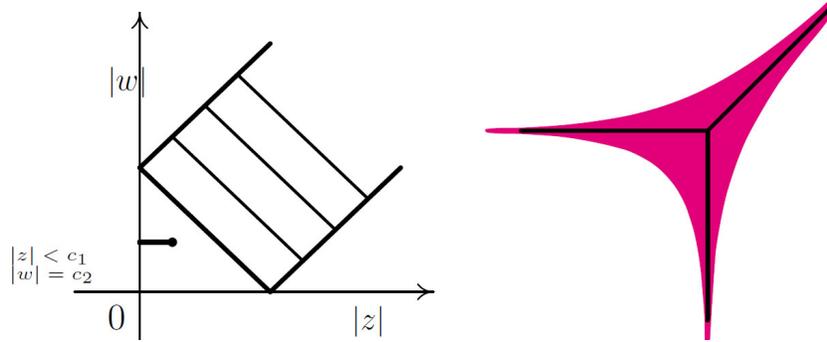
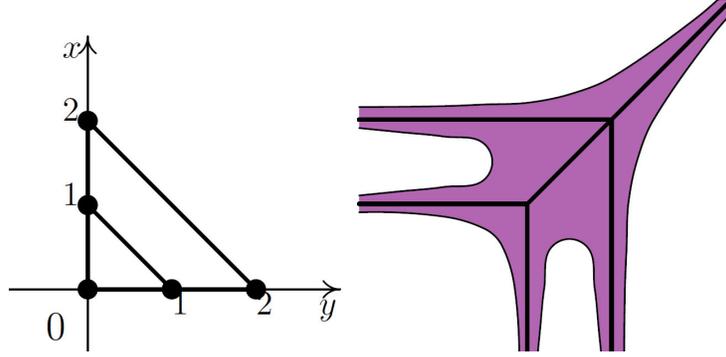


Fig. 4.7. La courbe $V = z + w - 1 = 0$ sur le diagramme de Reinhardt, son amibe \mathcal{A}_V et le squelette de cette amibe

Exemple 4.7. Soit $f(z) = 1 + z + w + z^2/6 + w^2/6$. La courbe $V = \{f(z) = 0\}$, son amibe et le squelette de cette amibe, ont été considérées dans [23]. On y montre là que la fonction polynomiale tropicale S_f dans ce cas est de la forme

$$S_f = \max\{0; a_{(1,0)} + x_1; a_{(0,1)} + x_2; -\ln 6 + 2x_1; -\ln 6 + 2x_2\},$$

où $a_{(1,0)} = a_{(0,1)} = \ln(3 - \sqrt{3})$. L'amibe de V et son squelette sont représentées sur la figure 4.8.



Δ_f , l'amibe de f et son squelette lorsque $f(z) := 1 + z + w + z^2/6 + w^2/6$

Exemple 4.8. L'étude des amibes est étroitement reliée avec la géométrie locale de Calabi-Yau qui modélise les théories de gauge en physique. Un exemple important dans la théorie $U(1)$ est l'amibe du polynôme de Laurent

$$f(z, w) = z - b - a(w - w^{-1}). \quad (4.8)$$

Ce polynôme f a comme polygone de Newton celui figuré sur la figure 4.9. La fonction polynomiale tropicale S_{A_f} est de la forme

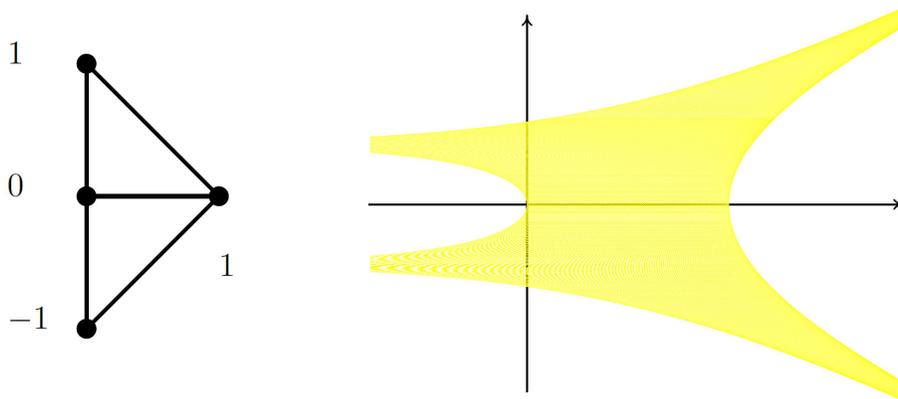
$$S_{A_f} = \max\{x; c_{00}; \ln 2 + y; \ln 2 - y\},$$

avec $c_{00} = \ln 4$.

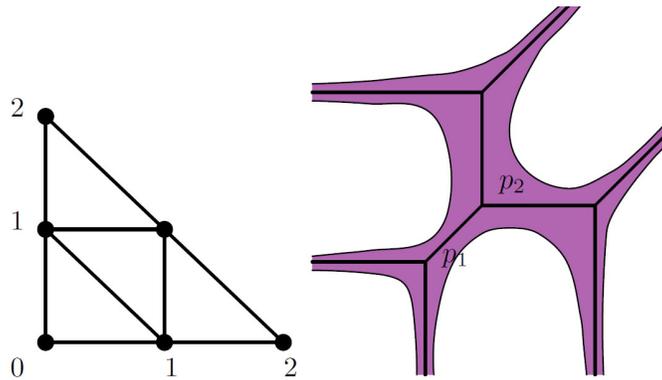
Exemple 4.9. Dans certains problèmes, il s'avère nécessaire de considérer des amibes dont le complémentaire présente le nombre maximal de composantes connexes (voir aussi [24]). On considère ici le cas $n = 2$ et la courbe

$$V = \{f(z_1, z_2) = Az_1^2 + Bz_2^2 + Cz_1z_2 + Dz_1 + Ez_2 + F =\} \quad . \quad (4.9)$$

Si l'amibe \mathcal{A}_f définie par 4.9 présente dans son complémentaire une composante E_α pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^2 \cap \Delta_f$, alors elle se présente comme sur la figure 4.10. Soit $f(z_1, z_2)$ de la forme 4.9, où A, B, C, D, E, F sont des nombres



Le polygone de Newton Δ_f de $f(z, w) = z - 5 - 2(w + w^{-1})$, son amibe et son squelette



Δ_f , l'amibe et son squelette lorsque le polynôme de Laurent est donné par $f(z_1, z_2) = Az_1^2 + Bz_2^2 + Cz_1z_2 + Dz_1 + Ez_2 + F$.

complexes et A, B, F sont non nuls. Alors la fonction polynomiale tropicale S_f , définissant le squelette de l'amibe \mathcal{A}_f , est de la forme

$$S_{\mathcal{A}_f} = \max\{\ln |A| + 2x, \ln |B| + 2y, f, x + \beta_1, y + \beta_2, x + y + \beta_3\},$$

où ici

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \ln \left| \frac{2AF}{\sqrt{D^2 - 4AF} - D} \right|; \\ \beta_2 &= \ln \left| \frac{2BF}{\sqrt{E^2 - 4BF} - E} \right|; \\ \beta_3 &= \ln \left| \frac{4ABF}{(\sqrt{D^2 - 4AF} + D)(\sqrt{E^2 - 4BF} - E)} \right|.\end{aligned}$$

Solidité de l'amibe d'un polynôme minimal

Dans le langage des amibes, la généralisation à plusieurs variables du fait que les racines du polynômes $f(z) = z^m - a$ soient sur un même cercle du plan complexe, consiste en la notion de *solidité* de l'amibe \mathcal{A}_f .

Définition 4.5. *Une amibe \mathcal{A}_f est dite solide si le nombre de composantes connexes $\{E\}$ de son complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ est minimal, c'est-à-dire égal exactement au nombre de sommets du polyèdre de Newton de f .*

Soit f un polynôme de Laurent

$$f(z) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha z^\alpha.$$

Définition 4.6. *On dit que f est minimal ou encore le plus « creux » possible si $c_\alpha \neq 0$ seulement pour les $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ qui sont sommets du polyèdre de Newton Δ_f .*

Il est naturel de formuler la question toujours ouverte : *Tout polynôme minimal (ou encore le plus creux possible) au sens de la définition précédente a-t'il une amibe solide?*

Si l'on fait appel aux idées de la géométrie tropicale, on peut montrer que la réponse à cette question est oui si $n = 2$ et si Δ_f n'a pas de points à coordonnées entières qui lui soit intérieur. Le squelette de l'amibe est bien sûr alors défini par la fonction polynomiale tropicale

$$S_{\mathcal{A}_f} = \max_{\alpha \in A'} \{\log |c_\alpha| + \langle \alpha, x \rangle\},$$

où A' figure l'ensemble des sommets du polygone de Newton Δ_f .

§5. Amibes généralisées

On suit ici une approche due à Igor Krichever [16].

§5.1. Amibe associée à une paire de différentielles sur une courbe lisse à points marqués

On se donne une courbe algébrique lisse compacte Γ de genre g avec des points marqués distincts notés p_1, \dots, p_N . On note $(\Gamma, \{p_1, \dots, p_N\})$ ces données. Le lemme suivant est en relation avec le lemme d'Abel inverse sur les surfaces de Riemann.

Lemme 5.1. *Étant donnée une collection $\{a_j ; j = 1, \dots, N\}$ de n nombres réels telle que $\sum_{j=1}^N a_j = 0$. Il existe alors une unique forme méromorphe $d\zeta_a$ de pôles exactement les points p_j , $j = 1, \dots, N$ et telle que $\text{res}_{p_j}[d\zeta_a] = a_j$ (pour tout $j = 1, \dots, N$) telle de plus que toutes les périodes de la forme $d\zeta_a$ sont imaginaires pures, ce qui signifie*

$$\text{Re}\left(\int_c d\zeta_a\right) = 0 \quad \forall c \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z}). \quad (5.1)$$

Remarque 5.1. On remarque que la clause (5.1) implique que

$$\zeta_a : p \in \Gamma_0 := \Gamma \setminus \{p_1, \dots, p_N\} \mapsto \text{Re}\left(\int^p d\zeta_a + C\right)$$

est une fonction monovalente⁷ bien définie et harmonique (comme partie réelle d'une fonction holomorphe) sur Γ privé des points p_j , $j = 1, \dots, N$.

On se donne deux telles formes différentielles $d\zeta_1$ et $d\zeta_2$ correspondant au choix de deux vecteurs linéairement indépendants a^1 et a^2 de \mathbb{R}^N . On introduit

$$\chi : p \in \Gamma_0 = \Gamma \setminus \{p_1, \dots, p_N\} \mapsto \text{Re}\left(\int^p d\zeta_1, \int^p d\zeta_2\right).$$

L'amibe associée ainsi à Γ est l'image de Γ_0 dans \mathbb{R}^2 par cette application χ .

⁷. Ce devrait être en principe une fonction multi-valuée mais compte tenu des contraintes qui président au choix de $d\zeta_a$, cette fonction est bien monovalente.

Exemple 5.1 (le cas classique). Lorsque Γ est une courbe plane, les deux formes que l'on considère sont $d\zeta_j = dz_j/z_j$, $j = 1, 2$, auquel cas $\chi = \text{Log}_{|\Gamma_0}$, les points marqués étant ici les points d'intersection de la courbe projective plane avec les plans d'équations $z_j = 0$ ($j = 0, 1, 2$) dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Lemme 5.2 (généralisation de la notion de contour). *Le lieu*

$$\gamma \subset \Gamma_0 = \Gamma \setminus \{p_1, \dots, p_N\}$$

des points critiques de l'application $\chi : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est l'union du lieu γ_0 où

$$R(p) = \left(\frac{d\zeta_1}{d\zeta_2} \right)_{|\Gamma_0}$$

*est réel avec les points où les deux différentielles $d\zeta_j$ s'annulent simultanément*⁸.

§5.3. La fonction de Ronkin généralisée

Soit $x \in \mathbb{R}^2$ et

$$\Gamma_x = \{p \in \Gamma_0 ; x_1(p) \leq x_1, x_2(p) \leq x_2\}.$$

Définition 5.1 (fonction de Ronkin généralisée). *On définit la fonction de Ronkin généralisée par*

$$\rho : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{8i\pi} \iint_{\Gamma_x} \text{sign}(\text{Im}(R(p))) (d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 - d\zeta_2 \wedge d\bar{\zeta}_1).$$

Hors des points du contour, la fonction ρ est régulière et sa matrice hessienne se calcule par exemple suivant la formule

$$\text{Hess}[\rho](x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi \in \rho^{-1}(x)} \frac{1}{|\text{Im}(R(\xi))|} \begin{pmatrix} 1 & \text{Re}(R(\xi)) \\ \text{Re}(R(\xi)) & |R(\xi)|^2 \end{pmatrix}.$$

§5.4. Extension au cadre multidimensionnel

L'extension de cette construction au cadre multi-dimensionnel a été réalisée par Yuri Eliyashev [9].

8. Il peut bien sûr ne pas en exister.

§6. Amibes non archimédiennes

À la place de $|z_j|$ dans la définition de Log, on peut considérer une valeur absolue ultramétrique, c'est-à-dire satisfaisant l'inégalité triangulaire forte

$$|x + y| \leq \max(|x|, |y|).$$

Exemple 6.1. L'exemple des séries de Puiseux formelles est un exemple significatif. Soit

$$P(t) = \sum_{\kappa \geq m} a_\kappa t^{\kappa/q} = \sum_{\alpha \geq v(P)} c_\alpha t^\alpha \quad (c_{v(P)} \neq 0).$$

une série de Puiseux formelle. La valuation de $P(t)$ (définie comme ci-dessus) est un nombre rationnel. On note \mathbb{K} le *corps des séries de Puiseux*.

Définition 6.1. L'amibe d'un idéal $I \subset \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ est définie comme l'image par l'application

$$(z_1(t), \dots, z_n(t)) \longmapsto (v(z_1), \dots, v(z_n))$$

du sous-ensemble de \mathbb{K}^n constitué des (z_1, \dots, z_n) tels que

$$P(z_1(t), \dots, z_n(t)) = 0$$

(comme élément de \mathbb{K}^n) pour tout élément $P \in I$.

En guise de conclusion ...

« Dans le monde qui nous entoure, tout est découvert ou redécouvert. C'est pourquoi il ne faut pas craindre de redécouvrir les choses »
Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov.

Références

- [1] Aizenberg L.A., Yuzhakov A.P., *Integral representations and residues in multidimensional complex analysis*. Novosibirsk, Nauka, 1979. (in Russian)

- [2] Antipova I.A., *Inversion of many-dimensional Mellin transforms and solutions of algebraic equations*, Sbornik : Mathematics, 2007, 198 :4, 447–463.
- [3] V.V.Batyrev, I.Ciocan-Fontanine, B.Kim, and Duco van Straten, *Conifold transitions and mirror symmetry for Calabi-Yau complete intersections in Grassmannians*, Nucl. Phys. B514 :3 (1998), 640-666.
- [4] P. Berglund P, P. Candelas, X. De La Ossa, A. Font, T. Hubsch, D.Janicic, F., Quedvedo *Mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in weighted P^4 and extensions of Landau Ginsburg theory*, Nucl. Phys. B419 (1994), p. 352.
- [5] Bergman G.M. *The logarithmic limit set of an algebraic variety* // Trans. AMS, V. 157 (1971), p. 459–469.
- [6] Birkeland, B. *Über die Auflösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Funktionen,*” Mathematische Zeitschrift, 26 (1927) : p. 566–578.
- [7] Bushueva, N.A., Tsikh, A.K. *On amoebas of algebraic sets of higher codimension.* Proc. Steklov Inst. Math. 279, 52-63 (2012)
- [8] Curtis Ch., Reiner I. *Representation theory of finite groups and associative algebras* — Wiley, 1962.
- [9] Y. Eliayshev, *Geometry of generalized amoebas*, *preprint*, [arXiv:1608.06077v1](https://arxiv.org/abs/1608.06077v1)
- [10] M. Forsberg, *Amoebas and Laurent series*. Doctoral thesis. Royal Institute of Technology, Stockholm, 1998.
- [11] M. Forsberg, M. Passare, and A. Tsikh, *Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas*, Adv. Math. **151** (2000), 45-70.
- [12] Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A. *Discriminants, resultants and multidimensional determinants.* — Birkhäuser, Boston, 1994.
- [13] Henriques A. *An analogue of convexity for complements of amoebas of varieties of higher codimension, an answer to a question asked by B. Sturmfels* // Advances in Geometry. V. 4, I. 1 (2004), p. 61–73.
- [14] Horn J. *Über die Convergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen* // Math. Ann. V. 34 (1889), p. 544–600.
- [15] M.M. Kapranov, *A characterization of A -discriminantal hypersurfaces in terms of the logarithmic Gauss map*, Math. Ann. **290** (1991), 277-285.

- [16] I. Krichever, Amoebas, Ronkin function, and Monge–Ampère measures of algebraic curves with marked points, American Mathematical Society Translations - Series 2, Advances in the Mathematical Sciences, **234**, 265-278 (2014).
- [17] G.L. Litvinov, V.P. Maslov *Correspondence Principle for Idempotent Calculus and Some Computer Applications*. Institut der Hautes Etudes Scientifiques, IHES/M/95/33, Dures-sur-Yvette, 1995, pp 420 – 443.
- [18] G. Mikhalkin, *Real algebraic curves, the moment map and amoebas*, Ann. of Math. (2) **151** (2000), 309-326.
- [19] E. N. Mikhalkin, A. K. Tsikh, *Singular strata of cuspidal type for classical determinants*, Mat. Sb., 2015, **206**, no. 2, pp. 119–148.
- [20] Mkrtchyan M.A., Yuzhakov A.P., *Newton polyhedron and Laurent series of a rational function in n variables*// Izvestiya of Academy of Sciences of Armenian SSR (1982), 17 (2). pp. 99-105. (in Russian)
- [21] Passare M., Pochekutov D., Tsikh A., *Amoebas of complex hypersurfaces in statistical thermodynamics* // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. March 2013, Volume 16, Issue 1, pp 89-108.
- [22] M. Passare and H. Rullgård, *Amoebas, Monge-Ampère measures, and triangulations of the Newton polytope*, Duke Math. J. **121** (2004), 481-507.
- [23] Passare M., Tsikh A. Amoebas : their spines and contours // Contemporary maths. V. 377 (2005), p. 275–288.
- [24] H. Rullgård, *Stratification des espaces de polynomes de Laurent et la structure de leurs amibes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 331 (2000), 355–358.
- [25] D. Speyer, B. Sturmfels, *Tropical mathematics*// A repository of electronic preprints — <http://arXiv.org/math/0408099>, 2004.
- [26] B. Sturmfels, *Open problems in algebraic statistics*, (editors M. Putinar and S. Sullivant), Emerging applications of algebraic Geometry, IMA volumes in mathematics and its applications. Springer, 2009 (149), 351-364.
- [27] Theobald T. *Computing amoebas* // Experimental Math. V. 11 (2002), p. 513–526.