Théorie du pluripotentiel sur les variétés kählériennes compactes

Eleonora Di Nezza

Un problème de base de la géométrie est de chercher à classifier les *variétés* : l'idée est de regrouper toutes les variétés avec des caractéristiques communes. Ainsi, pour comprendre la *forme* des variétés d'une même classe il suffit d'en étudier une.

Quelles sont alors les *caractéristiques* (les "filtres") que l'on cherche ? On cherche par exemple des *structures canoniques* qui vivent sur la variété. L'exemple plus connu est le *Théoréme d'Uniformisation* qui remonte au début du XIXe siècle et qui garantit que chaque variété (compacte lisse orientable) de dimension réelle 2 admet une *métrique* (=objet canonique) à courbure constante. On a trois cas : courbure constante positive et dans ce cas la variété peut être identifiée avec la *sphère* ; courbure constante nulle et dans ce cas la variété peut être identifiée avec le *tore* ; et courbure constante négative et dans ce cas la variété peut être identifiée avec un "bouée avec au moins deux trous", c'est-à-dire une *surface de Riemann de genre* $g \geq 2$, où le genre compte le nombre de trous.

Cependant, pour comprendre le monde dans lequel nous vivons il faut comprendre la situation en dimension plus grande, au moins en dimension 3 ! Il y a beaucoup de façons d'énvisager des généralisations du théorème d'uniformisation en dimension supérieure. Pour cette raison une option intéressante est de se restreindre à un groupe plus petit de variétés : on travaille avec les variétés kählériennes (qui sont des variétés très spéciales) ; la branche de la géométrie différentielle consacrée à leur étude est la *géométrie kählérienne*. On réduit alors le problème à l'étude des *métriques canoniques* en géométrie kählérienne. Parmi celles-ci la notion de *métrique de Kähler-Einstein* joue un rôle très important.

Mais, qu'est ce-que c'est une métrique de Kähler-Einstein ?

On considère X une variété kählérienne compacte. On dit qu'une forme kählérienne $\tilde{\omega}$ est Kähler-Einstein (KE) si elle vérifie la (celèbre) équation d'Einstein, c'est à dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\text{Ric}(\tilde{\omega}) = \lambda\tilde{\omega}. \tag{KE}$$

Le membre de gauche de l'equation (KE) est la *forme de Ricci* de $\tilde{\omega}$.

On se pose alors la question de l'existence des solutions, i.e. si étant donnée une variété kählérienne quelconque, on peut toujours trouver une métrique KE. La réponse est malheureusement non. En réalité, l'équation (KE) nous dit en particulier (en notant $\{\cdot\}$ la classe de cohomologie) que

$$c_1(X) = \{\text{Ric}(\tilde{\omega})\} \overset{\text{(KE)}}{=} \lambda\{\tilde{\omega}\}, \tag{0.1}$$

où $c_1(X)$ est un invariant topologique, appellé *première classe de Chern*. Il est important de souligner que l'identité $c_1(X) = \{\text{Ric}(\tilde{\omega})\}$, vraie indépendamment de (KE), nous donne un lien très fort entre la topologie de la variété et sa structure métrique : à nouveau, cela est un des miracles du cas kählérien.

L'identité (0.1) force $c_1(X)$ à avoir une signe défini : $c_1 > 0$ (dans ce cas la variété est dite de *Fano*), $c_1 = 0$ (dans ce cas la variété est dite de *Calabi-Yau*), $c_1 < 0$ (dans ce cas la variété est dite de *type général*). Comme dans le cas de dimension réelle 2, qui correspond à la dimension complexe 1, on retrouve la distinction entre trois cas (et ici on dirait que la sphère est Fano, le tore est Calabi-Yau et les surfaces de Riemann sont de type général).

Demander à la première classe de Chern d'avoir un signe défini est une obstruction forte à l'existence de métriques KE : il n'est pas toujours vrai qu'une classe de cohomologie admette (un représentant avec) un signe défini.

Cela dit, même si l'on se restreint à l'un de trois cas, comment attaquer concrètement le problème ? Fait miraculeux du monde kählérien : l'équation (KE) (qui *a priori* est un système d'EDP) est équivalente à une équation *scalaire* aux dérivées partielles non-linéaire, l'équation de *Monge-Ampère complexe*:

$$(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^{-\lambda\varphi+h}\omega^n \tag{MA$_\lambda$}$$

où h est une fonction lisse donnée et ω sert de référence dans $\{\tilde{\omega}\}$. On a donc réduit le problème à trouver une solution lisse φ de l'équation (MA$_\lambda$). La métrique KE voulue sera $\tilde{\omega} = \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$.

L'existence d'une solution lisse de (MA$_\lambda$) a été prouvée par Aubin [1] et Yau [7] dans le cas $\lambda < 0$ et par Yau [7] dans le cas $\lambda = 0$; plus précisément, le théorème de Yau (qui lui a valu la médaille Fields) garantit (entre autres) qu'étant données une variété kählérienne X avec $c_1(X) = 0$ et une classe de cohomologie $\{\omega\}$ sur X, il existe toujours une métrique $\omega_{KE} \in \{\omega\}$ telle que $\mathrm{Ric}(\omega_{KE}) = 0$. Notons que le résultat de Yau a changé le paysage : avant sa preuve de (ce qui était connu comme) la *conjecture de Calabi* on ne connaissait pas d'exemples non triviaux d'espaces Ricci-plats.

Dans le cas de courbure positive ($\lambda > 0$), c'est-à-dire quand X est une variété de Fano, la situation est beaucoup plus compliquée : l'existence des métriques Kähler-Einstein n'est pas garantie en général. Ce problème est aujourd'hui un domaine de recherche très actif et productif. Récemment, X.X. Chen, S. Donaldson et S. Sun [3, 4, 5], et G. Tian [6], ont indépendamment prouvé ce qu'on appelle la *conjecture de Yau-Tian-Donaldson* pour les métriques Kähler-Einstein : une variété de Fano X admet une métrique Kähler-Einstein si et seulement si elle est K-stable (K-stabilité : propriétés de nature algébrique de la variété).

La preuve de Yau de la conjecture de Calabi s'appuie sur la *méthode de continuité*, un outil classique pour résoudre des EDP non linéaires : il consiste à déformer l'équation considérée en une version plus simple pour laquelle nous avons déjà existence d'une solution. L'objectif est d'établir différentes estimées *a priori*. Comme souvent, l'étape la plus difficile ici est l'estimée C^0, et pour cela Yau utilise un processus itératif à la Moser.

Dans ce cours on montre une autre méthode pour résoudre l'équation (MA_λ) : la méthode variationelle, développée dans [2]. Cette méthode, comme on va le voir, peut être utlisée dans des situations beaucoup plus générales (par exemple dans le cas où $e^h \in L^p(X)$ pour quelque $p > 1$ et $h \notin C^\infty(X, \mathbb{R})$).

Pour cette raison on développe des outils de la théorie du pluripotentiel sur une variété kählérienne compacte (X, ω) : on introduit les fonctions *ω-plurisousharmoniques* et les classes d'énergie de Monge-Ampère $\mathcal{E}(X, \omega)$ et $\mathcal{E}^1(X, \omega)$. Ces classes (spécialement $\mathcal{E}^1$) jouent un rôle très important dans l'approche variationelle : l'idée de base est de maximiser une fonctionelle $\mathcal{F}_\lambda$ (définie sur $\mathcal{E}^1(X, \omega)$) et de démontrer qu'un point réalisant le maximum est solution de l'équation de Monge-Ampère (MA_λ) qui nous intéresse.

La Référence (avec la “R” majuscule !) est le livre suivant :

- V. Guedj, A. Zeriahi : *Degenerate Complex Monge-Ampère Equations*, EMS Tracts in Mathematics Vol. 26, January 2017, 496 pages, DOI 10.4171/167.

D'autres références (qui vous pouvez trouver en ligne) sont :

- Pour ce qui concerne la définition des variétés kählériennes :
  B. Weinkove : *The Kähler-Ricci flow on compact Kähler manifolds*, arXiv:1502.06855.
- Pour ce qui concerne les fonctions ω-plurisousharmoniques :
  V. Guedj, A. Zeriahi : *Intrinsic capacities on compact Kähler manifolds*, J. Geom. Anal. 15, 607-639 (2005), arXiv:math/0401302.
- Pour ce qui concerne la mesure de Monge-Ampère non-pluripolaire et les classes d'énergie :
  V. Guedj, A. Zeriahi : *The weighted Monge-Ampère energy of quasiplurisubharmonic functions*, J. Funct. Anal., Vol. 250, no. 2 (2007), 442-482, arXiv:math/0612630.
  D. Coman, V. Guedj, A. Zeriahi: *Domain of definition of Monge-Ampère operators on compact Kähler manifolds*, Math. Z. 259, 393-418 (2008), arXiv:0705.4529.
- Pour ce qui concerne l'approche variationelle :
  R. J. Berman, S. Boucksom, V. Guedj, A. Zeriahi : *A variational approach to complex Monge-Ampère equations*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., Vol. 117 (2013), arXiv:0907.4490.

References

[1] T. Aubin : *Equations du type Monge-Ampère sur les varietes kählériennes compactes*, CR Acad. Sci Paris, Vol. 283 (1978), 119-121.

[2] R. J. Berman, S. Boucksom, V. Guedj, A. Zeriahi : *A variational approach to complex Monge-Ampère equations*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., Vol. 117 (2013), 179-245.

[3] X. X. Chen, S. K. Donaldson, S. Sun : *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds, I: approximation of metrics with cone singularities*, J. Amer. Math. Soc., vol. 28 (2015), 183-197.

[4] X. X. Chen, S. K. Donaldson, S. Sun : *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds, II: limits with cone angle less than* 2π, J. Amer. Math. Soc., vol. 28 (2015), 199-234.

[5] X. X. Chen, S. K. Donaldson, S. Sun : *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds, III: limits as cone angle approaches 2π and completion of the main proof*, J. Amer. Math. Soc., vol. 28 (2015), 235-278.

[6] G. Tian : *K-stability and Kähler-Einstein metrics*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 68, no. 7 (2015), 1085-1156.

[7] S. T. Yau : *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation*, Comm. Pure Appl. Math., vol. 31, no. 3 (1978), 339-411.