Courants Résidus et Problèmes d'Appartenance Effectifs

Elizabeth Wulcan

2017

§1. Problèmes d'appartenance effectifs

§1.1. Présentation du problème

Soient $F_1, ..., F_m$ m polynômes en n variables à coefficients complexes ($F_j \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$), ou m germes dans l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} = \mathcal{O}_0$, ou encore m sections locales d'un certain faisceau d'anneaux $\mathcal{F}$ ($F_1, ..., F_m \in \mathcal{F}(U)$, U ouvert d'une variété analytique complexe).

Étant donné $\Phi \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ (ou encore $\Phi \in \mathcal{O}$ ou $\Phi \in \mathcal{F}(U)$), on se pose la question de savoir si Φ appartient à l'idéal engendré par $(F_1, ..., F_m)$ dans $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ (ou encore, suivant le contexte, dans $(F_1, ..., F_m)\mathcal{O}_0$ ou $(F_1, ..., F_m)\mathcal{F}(U)$) ; dans tous les cas, on notera $\mathcal{I}_{\boldsymbol{F}}$ l'idéal engendré par $F_1, ..., F_m$. Plus précisément, on cherche à expliciter si cela est possible $Q_1, ..., Q_m$ (dans $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, $\mathcal{O}_0$ ou $\mathcal{F}(U)$ suivant le contexte) tels que

$$\Phi = \sum_{j=1}^{m} Q_j F_j. \tag{1.1}$$

La première observation est que pour que $Q_1, ..., Q_m$ existent, il faut que F s'annule sur le lieu des zéros communs $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{F}} := \{F_1 = \cdots = F_m\}$ de F. De fait, il s'agit de la seule obstruction si on s'accorde la possibilité de remplacer Φ dans (1.1) par une puissance Φ^ν. On rappelle en effet ici le Théorème des zéros de Hilbert (David Hilbert, 1890), ici dans le cadre algébrique de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$.

Théorème 1.1 (Nullstellensatz, David Hilbert, 1890, [18])**.** *Soient $F_1, ..., F_m$ et $\Phi \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ tels que $F(z) = 0$ pour tout $z \in \mathcal{Z}_{\boldsymbol{F}}$. Il existe $\nu \in \mathbb{N}$ et $Q_1, ..., Q_m \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ tels que*

$$\Phi^\nu = \sum_{j=1}^{m} Q_j F_j. \tag{1.2}$$

Remarque 1.1. Dans le cas particulier où $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{F}} = \emptyset$, on obtient l'existence de $Q_1, ..., Q_m$ tels que

$$1 = \sum_{j=1}^{m} Q_j F_j. \tag{1.3}$$

Remarque 1.2. On dispose d'un énoncé analogue à celui du Théorème 1.1 dans le cadre où $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ est remplacé par l'anneau local $\mathcal{O}_0$. C'est le Nullstellensatz de Rückert.

§1.2. Le Nullstellensatz effectif

L'objectif est de borner ν et les degrés des Q_j dans (1.2) ou (1.3). On peut aussi se poser le problème de borner les tailles (hauteurs logarithmiques des numérateurs et dénominateurs coefficients) lorsque $P_j, Q \in \mathbb{Z}[X_1, ..., X_n]$ (Berenstein-Yger [10], Krick-Pardo-Sombra [23], d'Andrea-Krick-Sombra [1]).

Les premières bornes effectives pour le Nullstellensatz sont dues à Greta Hermann [15] : *si $F_1, ..., F_m$ sont des polynômes de degrés $\leq d$ en n variables et à coefficients complexes, tels que $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{F}} = \emptyset$, il existe $Q_1, ..., Q_m$ solutions de* (1.3) *avec*

$$\max_{1 \leq j \leq m} \deg Q_j \preceq 2(2d)^{2^{n-1}}$$

(bornes doublement-exponentielles) ; les Q_j sont obtenus algorithmiquement (théorie de l'élimination). Le recours à la division euclidienne et aux bases de Gröbner fournit dans le cas général une solution $(Q_1, ..., Q_m)$ au problème avec des estimations comparables.

Ce problème a fait l'objet de nombreux travaux. Des bornes presque optimales furent obtenues à la fin des années 1980 par Dale W. Brownawell [8], puis améliorées en 1988 par Janos Kollár.

Théorème 1.2 (J. Kollár, 1988, [24])**.** *On suppose que* $F_1, ..., F_m \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ *sont tels que* $\max \deg F_j \leq d$ $(d \neq 2)$ *et que* $\Phi \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ *est tel que* $\Phi(z) = 0$ *pour tout* $z \in \mathcal{Z}_{\boldsymbol{F}}$*. Alors, il existe* $Q_1, ..., Q_m$ *et* $\nu \in \mathbb{N}$ *tels que* (1.2) *soit remplie, avec*

$$\nu \leq d^\mu \quad (\mu := \min(n, m)), \quad \deg(F_j Q_j) \leq (1 + \deg \Phi)\, d^\mu.$$

Remarque 1.3. Dans le cas où $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{F}} = \emptyset$ et où $\max_{1 \leq j \leq m} \deg F_j \leq d$ avec $d \neq 2$, il existe $Q_1, ..., Q_m$ solutions de (1.3) avec $\max_{1 \leq j \leq m} \deg Q_j \leq d^\mu$, où $\mu = \min(n, m)$. Ce résultat ne couvre pas pour l'instant le cas $d = 2$.

Remarque 1.4 (le cas $d = 2$)**.** La conclusion du Théorème 1.2 incluant le cas $d = 2$ est due à M. Sombra (1999, [31]) et à Z. Jelonek (2005, [22]). On a

— si $d = 2$ et $m \leq n$, on peut trouver les Q_j et ν dans (1.2) avec $\nu \leq 2^m$ et $\max_{1 \leq j \leq m} \deg Q_j \leq (1 + \deg \Phi)\, 2^m$ et lorsque $m \leq n$ (Z. Jelonek, 2005, [22]) ;

— si $d = 2$ et $m > n$, on peut trouver les Q_j et ν dans (1.2) avec $\nu \leq 2^{m+1}$ et $\max_{1 \leq j \leq m} \deg Q_j \leq (1 + \deg \Phi) 2^{m+1}$ (M. Sombra, 1999, [31]).

Les bornes dans (1.2) et (1.3) peuvent être précisées si l'on remplace d^μ par $d_1 \cdots d_\mu$ où $d_j = \deg F_j$ et $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_{m-1} \geq d_m$. De plus, les bornes du Théorème de Kollár 1.2 sont essentiellement optimales comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.1 (J. Kollár, D. Masser, P. Philippon)**.** Soient, dans le cas $n = 2$, et si $d \in \mathbb{N}^*$,

$$F_1(X_1, X_2) = 1 - X_1 X_2^{d-1}, \; F_2(X_1, X_2) = Z_1^d.$$

On a $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{F}} = \emptyset$ et $\deg F_1 = \deg F_2 = d$. Supposons qu'il existe Q_1, Q_2 dans $\mathbb{C}[X_1, X_2]$ avec $1 = Q_1 F_1 + Q_2 F_2$. Considérons la courbe affine plane paramétrée par $\mathbb{C}^*$ en

$$t \in \mathbb{C}^* \longmapsto (t^{d-1}, 1/t).$$

On a

$$F_1(\gamma(t)) = 1 - t^{d-1}/t^{d_1} = 0, \quad F_2(\gamma(t)) = t^{d(d-1)}.$$

On a donc en exploitant $1 = Q_1 F_1 + Q_2 F_2$ que

$$\forall\, t \in \mathbb{C}^*, \; 1 = Q_2(t^{d-1}, 1/t)\, t^{d(d-1)}.$$

Le monôme $Z_2^{d(d-1)}$ doit être par conséquent présent dans Q_2, sinon, le facteur $t^{d(d-1)}$ ne saurait être « tué ». On a donc $\deg Q_2 \geq d(d-1)$ et ainsi $\deg Q_2 \geq d^2$. Le résultat de Kollár est donc optimal lorsque les F_j sont supposés quelconques : il existe, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, n polynômes $F_1, ..., F_n$ tous de degré au plus d, sans zéros communs dans $\mathbb{C}^n$, et tels que

$$1 = \sum_{j=1}^{n} Q_j F_j \text{ pour un choix de } Q_j \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n] \Longrightarrow \max_{1 \leq j \leq n} \deg Q_j \geq d^n.$$

§1.3. Le théorème de Briançon-Skoda

Une question naturelle (dans le cadre algébrique des algèbres de polynoômes sur $\mathbb{C}$) est de se demander si la réalisation effective du Nullstellensatz (1.2) peut être affinée en termes des degrés des polynômes Q_j et de la taille de l'entier ν lorsque l'on impose des conditions additionnelles soit à Φ (en plus de juste s'annuler sur $\mathcal{Z}_F$), soit au comportement à l'infini de l'application polynomiale $\boldsymbol{F} = (F_1, ..., F_m)$ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^m$.

Les premiers résultats que nous envisageons ici concernent le cas où Φ s'annule « au moins comme » l'application polynomiale $\boldsymbol{F}$.

On rappelle que $\Phi \in \boldsymbol{R} = \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ ou $\mathcal{O}_0$ appartient *à la clôture intégrale de l'idéal* $\mathcal{I}_F := (F_1, ..., F_m)\boldsymbol{R}$ (où les F_j appartiennent à $\boldsymbol{R}$) dans $\boldsymbol{R}$ si et seulement si il existe $s \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_s \in \boldsymbol{R}$ avec $\boldsymbol{a}_j \in \mathcal{I}_F^j$ pour $j = 1, ..., s$, tels que

$$\Phi^s + \sum_{j=1}^{s} \boldsymbol{a}_j \Phi^{s-j} = 0 \quad \text{dans } \boldsymbol{R},$$

ou encore, ce qui est équivalent dans les deux cas envisagés ici (qui sont $\boldsymbol{R} = \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ et $\boldsymbol{R} = \mathcal{O}_0$),

$$\frac{|\Phi|}{\|\boldsymbol{F}\|} \text{ localement bornée au voisinage de } \mathcal{Z}_F$$

(au voisinage de l'origine si $\boldsymbol{R} = \mathcal{O}_0$) si $\|\boldsymbol{F}\|$ désigne la norme euclidienne de $\boldsymbol{F} = (F_1, ..., F_m)$. On notera la clôture intégrale de l'idéal $\mathcal{I}_F$ par $\overline{\mathcal{I}_F}$.

Théorème 1.3 (J. Briançon, H. Skoda, 1974, [8]). *Si* $\boldsymbol{F} = (F_1, ..., F_m)$ *est une application polynomiale de* $\mathbb{C}^n$ *dans* $\mathbb{C}^m$ *(respectivement un germe d'application holomorphe de* $\mathcal{O}_0$ *dans* $\mathcal{O}_0^m$*) et que* $\Phi \in \overline{\mathcal{I}_{\boldsymbol{F}}^{\mu}}$ *avec* $\mu = \inf(n, m)$*, ce* *qui équivaut à dire :*

$$\frac{|\Phi|}{\|F\|^{\mu}} \text{ localement bornée au voisinage de } \mathcal{Z}_{\boldsymbol{F}},$$

alors, il existe $Q_1, ..., Q_m$ *dans* $\boldsymbol{R} = \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ *(respectivement dans* $\mathcal{O}_0$*) tels que*

$$\Phi = \sum_{j=1}^{m} Q_j F_j. \tag{1.4}$$

Remarque 1.5. La formulation originelle de ce résultat était la suivante : si $|\Phi|/\|\boldsymbol{F}\|$ est localement bornée au voisinage de $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{F}}$ alors $\Phi^{\mu} = \sum_{j=1}^{m} Q_j F_j$ avec $Q_1, ..., Q_m \in \boldsymbol{R}$. Par exemple si $\boldsymbol{R} = \mathbb{C}[X_1, X_2]$ et que $F_1 = X_1^2$, $F_2 = X_2^2$ et $\Phi = X_1^3 X_2$, on a bien que $\Phi/\|\boldsymbol{F}\|^2$ est localement bornée au voisinage de $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{F}}$, donc $\Phi \in \mathcal{I}_{\boldsymbol{F}}$. Bien sûr ici Φ ne saurait être de la forme Ψ^2. La formulation du Théorème 1.3 est donc plus forte que la formulation originelle.

En 2001, M. Hickel prouva le résultat suivant (dans le cadre de l'algèbre polynomiale $\boldsymbol{R} = \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$).

Théorème 1.4 (M. Hickel, 2001, [17])**.** *Soient* $F_1, ..., F_m \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ *avec* $\max_{1 \le j \le n} \deg F_j \le d$ *et* $\Phi \in \overline{\mathcal{I}_{\boldsymbol{F}}^{\mu}}$*. Alors, il est possible de trouver des polynômes* Q_j *(*$j = 1, ..., m$*) satisfaisant* (1.4) *avec de plus*

$$\max_{1 \le j \le m} \deg(F_j Q_j) \le \deg \Phi + \mu\, d^{\mu}.$$

Remarque 1.6.

- On peut préciser ce résultat si l'on prend en compte des bornes séparées $\deg F_j \le d_j$ pour les polynômes F_j ($j = 1, ..., m$).
- On peut comparer ce résultat à celui de Kollár (théorème 1.2) et observer que dans le cas où $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{F}} = \emptyset$, on obtient la borne d^{μ}, mais multipliée ici par le facteur μ.

§1.4. Meilleure géométrie à l'infini $\Longrightarrow$ meilleures bornes

Nous montrons dans cette sous-section comment la géométrie des zéros de $\boldsymbol{F}$ « à l'infini » peut affecter les bornes dans le Nullstellensatz effectif.

On introduit ici

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{CP}^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, ..., 0\}}{\sim},$$

la relation d'équivalence $\sim$ étant la relation de colinéarité

$$z = (z_0, ..., z_n) \sim w = (w_0, ..., w_n) \Longleftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } w = \lambda z.$$

On notera $[z_0 : \cdots : z_n]$ la classe d'équivalence de $(z_0, ..., z_n)$.
Alors $\mathbb{C}^n$ s'identifie à l'ouvert

$$\mathbb{C}^n \simeq \{[z_0 : \cdots : z_n]\,;\, z_0 \neq 0\} = \{[1 : z_1/z_0 : \cdots : z_n/z_0]\,;\, z_0 \neq 0\}$$

et

$$\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{C}^n = \{[0 : z_1 : \cdots : z_n]\,;\, (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{(0, ..., 0)\}\} = \{z_0 = 0\}$$

est dit *hyperplan à l'infini* de $\mathbb{P}^n$ et noté H_∞.
À un polynôme $F \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, on peut associer son homogénéisé

$$f(X_0, ..., X_n) := X_0^{\deg F} F(X_1/X_0, ..., X_n/X_0)$$

et considérer alors $z \in \mathbb{P}^n \mapsto f(z)$ comme une section globale du fibré en droites $\mathcal{O}(\deg F)$.

Si $F_1, ..., F_m$ sont des polynômes de degrés d_j au plus d et Φ un polynôme de degré $\rho \geq d$, dire que l'on a $\Phi = \sum_{j=1}^m Q_j F_j$ avec $\max_{1\leq j\leq m} \deg F_j Q_j = \rho$ équivaut à dire (en considérant les homogénéisations) que

$$\varphi = \sum_{j=1}^m f_j q_j$$

où f_j figure l'homogénéisé de F_j (de degré d_j), φ celui de Φ (de degré ρ) et q_j est un polynôme homogène de degré $\rho - d_j$.

Exemple 1.2. On reprend ici l'exemple 1.1. Les homogénéisés de F_1 et F_2 sont ici respectivement

$$f_1(X_0, X_1, X_2) = X_0^d - X_1 X_2^{d-1}, \quad f_2(X_0, X_1, X_2) = X_1^d.$$

Dire que $\varphi(X_0, X_1, X_2) = X_0^\rho$ appartient à l'idéal homogène (f_1, f_2) implique en particulier que

$$\varphi(X_0, X_1, 1) = X_0^\rho \in \big(X_0^d - X_1, X_1^d\big).$$

On voit encore que nécessairement $\rho \geq d^2$.

On remarque heuristiquement à partir de cet exemple que le fait que $\boldsymbol{F}$ possède un zéro isolé (de multiplicité la plus grande possible) à l'infini induit la pire situation en ce qui concerne les estimations de ν et (donc) de $\max_{1\leq j\leq m}\deg F_jQ_j$ dans le théorème de Kollár 1.2.

Examinons par contre ici le cas où l'application polynomiale $\boldsymbol{F}$ ne possède aucun zéro à l'infini.

Théorème 1.5 (théorème de Macaulay, 1916, [26])**.** *Si $F_1,...,F_m$ sont m éléments de $\mathbb{C}[X_1,...,X_n]$ de degrés au plus $d\in\mathbb{N}^*$ dont les homogénéisés $f_1,...,f_m$ ont comme seul zéro commun l'origine de $(0,...,0)$ de $\mathbb{C}^{n+1}$, ce qui équivaut à dire que $F_1,...,F_m$ n'ont aucun zéro commun ni dans $\mathbb{C}^n$, ni même dans $\mathbb{P}^n$, alors il existe $Q_1,...,Q_m$ dans $\mathbb{C}[X_1,...,X_n]$ tels que*

$$1=\sum_{j=1}^m Q_jF_j \quad \text{et} \quad \max_{1\leq j\leq m}\deg(F_jQ_j)\leq(n+1)d-n. \tag{1.5}$$

§1.5. Le Nullstellensatz géométrique de Ein-Lazarsfeld

Un autre exemple de situation où une information sur la variété « à l'infini » de $\mathcal{Z}_F$ s'avère utile aux fins d'améliorer les bornes, cette fois dans le théorème de Briançon-Skoda 1.3 (et non plus dans le théorème de Kollár 1.2) est le résultat obtenu par L. Ein et R. Lazarsfeld en 1999.

Il faut tout d'abord introduire quelques notions de géométrie analytique. Soit $\boldsymbol{f}$ une collection de $m\geq 1$ polynômes homogènes en $n+1$ variables $X_0,...,X_n$. On introduit les *variétés distinguées* (au sens de Fulton-MacPherson) de l'idéal homogène $\mathcal{I}_{\boldsymbol{f}}$ sur $\mathbb{P}^n$. Pour cela, on réalise l'éclatement normalisé

$$\pi\ :\widehat{\mathbb{P}^n}\longrightarrow\mathbb{P}^n$$

le long de l'idéal $\mathcal{I}_f$. Il se trouve alors que $\pi^{-1}(\mathcal{Z}_{\boldsymbol{f}})$ se trouve être le support d'un fibré en droites $\mathcal{E}\to\widehat{\mathbb{P}^n}$, dit *diviseur exceptionnel* de l'application polynomiale homogène $(\boldsymbol{f})$ (localement $\pi^*(\boldsymbol{f})$ s'exprime comme le produit tensoriel d'une section holomorphe de $\mathcal{E}$ par une section ne s'annulant pas d'un certain fibré holomorphe de rang m). Pour chaque $j=0,...,\dim\mathcal{Z}_{\boldsymbol{f}}$, on note $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{f},j}$ l'union des variétés algébriques $\pi(Y_{j,\iota})$, où les $Y_{j,\iota}$ sont les composantes irréductibles du support du diviseur exceptionnel $\mathcal{L}$ dont l'image par π est exactement de codimension $n-j$ dans $\mathbb{P}^n$.

On a

$$\mathcal{Z}_{\boldsymbol{f}} = \bigcup_{j=0}^{\dim \mathcal{Z}_{\boldsymbol{f}}} \mathcal{Z}_{\boldsymbol{f},j}.$$

On note aussi

$$c_\infty(\boldsymbol{f}) = \begin{cases} \max\left\{\operatorname{codim} \mathcal{Z}_{\boldsymbol{f},j}\,;\, \mathcal{Z}_{\boldsymbol{f},j} \subset H_\infty\right\} & \text{si cet ensemble est non vide} \\ -\infty \quad \text{sinon.} & \end{cases}$$

On observe que $c_\infty \leq \min(n, m)$.

Exemple 1.3. Dans l'exemple 1.1 où $f_1(X_0, X_1, X_2) = X_0^d - X_1 X_2^{d-1}$ et $f_2(X_0, X_1, X_2) = X_1^d$, l'ensemble $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{f}}$ est le point à l'infini $\{z_0 = z_1 = 0\}$ et l'on a donc $c_\infty = 2$.

Théorème 1.6 (L. Ein et R. Lazarsfeld, 1999, [14])**.** *Soient $F_1, ..., F_m, \Phi$, $m+1$ éléments de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ tels que $F_1, ..., F_m$ soient de degrés au plus d et que $|\Phi|/\|\boldsymbol{F}\|^\mu$ soit localement bornée au voisinage de $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{F}}$. Il existe alors des polynômes $Q_1, ..., Q_m$ tels que*

$$\Phi = \sum_{j=1}^{m} Q_j F_j, \quad \max_{1 \leq j \leq m} \deg(Q_j F_j) \leq \max\Big(\deg \Phi + \mu d^{c_\infty}\,,\, (n+1)d - n\Big). \tag{1.6}$$

Remarque 1.7.

- Le résultat de Ein-Lazarsfeld est énoncé dans le cadre plus général des variétés analytiques complexes lisses (à la place de $\mathbb{P}^n$).
- En injectant le fait que $c_\infty \leq \mu$, on obtient un raffinement du résultat de M. Hickel (théorème 1.4).
- Si de plus $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{F}} = \emptyset$, ce résultat assure l'existence de polynômes $Q_1, ..., Q_m$ tels que $1 = \sum_{j=1}^m Q_j F_j$ avec

  $$\max(\deg Q_j F_j) \leq \max(\mu d^{c_\infty}, (n+1)d - n),$$

  résultat que l'on peut comparer avec celui de Kollár (théorème 1.2) où d^μ remplace μd^{c_∞}.
- Si enfin $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{f}} = \emptyset$, on a $d^{c_\infty} = 0$ et l'on retrouve en prenant $\Phi \equiv 1$ la conclusion du théorème de Macaulay 1.5.

Les objectifs à ce stade. Notre objectif à partir de maintenant est de prouver les théorèmes 1.3, 1.4 et 1.6 en exploitant la théorie des courants résidus, êtres analytiques en correspondance avec les idéaux de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ où $\mathcal{O}_0$.

La démarche à venir. Donnons une idée rapide de la manière de procéder ; prenons pour cela le modèle de l'énoncé du théorème 1.6. Les deux étapes de la démarche seront les suivantes.

1. Tout d'abord, il conviendra de vérifier sous les hypothèses proposées l'appartenance <u>locale</u> de Φ à l'idéal $(\boldsymbol{F})$; c'est précisément à cette fin que sera exploitée la machinerie des courants résiduels (introduite section 2). La première entrée dans la prise de maximum contrôlant en (1.6) le maximum des degrés des F_jQ_j proviendra d'une telle étude.
2. Il faudra ensuite <u>passer du local au global</u> en utilisant la résolution de l'opérateur $\bar{\partial}$. On lèvera ainsi les obstructions de nature cohomologique et le prix à payer correspondra à la seconde entrée dans la prise de maximum contrôlant en (1.6) le maximum des degrés des F_jQ_j.

§2. Courants, courants résiduels classiques

§1.1. La notion de courant, exemples

Exemple 2.1 (courant d'intégration sur une sous-variété lisse)**.** Soit $Z \subset X$ une sous-variété lisse de dimension d d'une variété analytique complexe X. Le courant d'intégration $[Z]$ sur Z est le courant de bi-dimension (d, d) défini par

$$\xi \in \mathcal{D}^{p,p}(X) \longmapsto \int_X \xi_{|Z}.$$

Il s'agit d'un courant d'ordre 0 et de support l'ensemble Z.

Exemple 2.2 (courant d'intégration sur un sous-ensemble analytique fermé de dimension pure)**.** Soit Z un sous-ensemble analytique de dimension pure égale à d d'une variété analytique complexe. Le lieu singulier Z_{sing} de Z est aussi un sous-ensemble analytique fermé de X, inclus dans Z, de dimension (a priori non pure) strictement inférieure à d. Il existe une famille de fonctions « plateau »(ou aussi « *cut-off* ») $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de support compact inclus dans l'ouvert $X \setminus Z_{\text{sing}}$ convergeant uniformément sur tout compact vers la fonction constante égale à 1 sur X. On admettra ici que pour toute forme test ξ de bidegré (p,p), la limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_Z \psi_\varepsilon\,\xi = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{Z_{\mathrm{reg}}} \psi_\varepsilon\,\xi$$

(où $Z_{\mathrm{reg}} = Z \setminus Z_{\mathrm{sing}}$) existe du fait que le courant d'intégration sur la sous-variété lisse (de dimension d) Z_{reg} a une masse finie au voisinage de tout point de Z (voir par exemple [12], I, Lemme 2.6). On définit alors le courant d'intégration $[Z]$ sur Z comme le courant de bi-dimension (d,d) :

$$\xi \in \mathcal{D}^{p,p}(X) \longmapsto \lim_{\varepsilon\to 0}\int_Z \psi_\varepsilon\,\xi = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{Z_{\mathrm{reg}}} \psi_\varepsilon\,\xi.$$

§1.2. Opérations sur les courants

§1.3. Courants résiduels

Les *courants résiduels* permettent de représenter les idéaux, au même titre que les courants d'intégration (voir l'exemple 2.2) permettent de représenter les sous-ensembles analytiques fermés. Leur champ d'application concerne l'algèbre, l'analyse et la géométrie, par exemple

— les problèmes de division (on en verra des exemples dans ce cours)

— la résolution du $\bar\partial$ sur les espaces analytiques singuliers.

Courant résidu associé à une fonction holomophe ([16],1971)

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert de $\mathbb{C}^N$ (ou sur une variété analytique complexe X de dimension N). On définit la distribution Valeur Principale PV$[1/f]$ (que pour simplifier on notera $1/f$) par

$$\forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \Big\langle \frac{1}{f}, \xi \Big\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|f|\geq\varepsilon} \frac{\xi}{f}\,d\lambda_{2N}, \qquad (2.1)$$

où $d\lambda_{2N}$ est la mesure de Lebesgue $2N$-dimensionnelle dans $\mathbb{C}^N \simeq \mathbb{R}^{2N}$. Cette distribution est bien définie (on y reviendra).

On a les propriétés suivantes.

1. Il est immédiat de vérifier qu'au sens des distributions $f \cdot 1/f = 1$; en effet

$$\forall\,\xi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|f|\geq\varepsilon} f\,\frac{\xi}{f}\,d\lambda_{2N} = \int \xi\,d\lambda_{2N}.$$

2. Si $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une famille de fonctions plateau de support dans $\Omega\setminus f^{-1}(0)$ convergeant lorsque ε tend vers 0 vers la fonction 1 uniformément sur tout compact de Ω, on a
$$\forall\,\xi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \Big\langle \frac{1}{f}\,,\,\xi\Big\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \chi_\varepsilon \frac{\xi}{f}\, d\lambda_{2N}. \tag{2.2}$$
3. On peut aussi réaliser la distribution $1/f$ ainsi :
$$\forall\,\xi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \Big\langle \frac{1}{f}\,,\,\xi\Big\rangle = \Big[\int_\Omega \frac{|f|^{2\lambda}}{f}\,\xi\, d\lambda_{2N}\Big]_{\lambda=0}, \tag{2.3}$$
la prise de crochet au membre de droite signifiant que l'on suit le prolongement analytique depuis le demi-plan $\mathrm{Re}\,\lambda >> 1$ et que l'on évalue la valeur en $\lambda = 0$, le prolongement analytique s'avérant possible dans un demi-plan $\{\mathrm{Re}\,\lambda > -\eta_\xi\}$ avec $\eta_\xi > 0$ dépendant du support compact K de ξ.

L'existence de la distribution $1/f$, tout comme les propriétés 2 et 3 ci-dessus traduisant des manières alternatives de la définir, sont justifiées par le recours au théorème de résolution des singularités d'Hironaka [19] qui permet de ramener la situation au cas où f se présente localement comme le produit d'une fonction holomorphe inversible par un monôme (situation dite « à croisements normaux »).

Une fois la distribution $1/f$ définie, on peut envisager $\bar\partial(1/f)$ au sens des courants. Il faut ici penser $1/f$ comme un $(0,0)$-courant, agissant donc sur les (n,n)-formes tests. On a ainsi
$$\begin{aligned}\forall\,\xi \in \mathcal{D}^{n,n-1}(\Omega), \quad \Big\langle \bar\partial\Big(\frac{1}{f}\Big),\xi\Big\rangle &= -\Big\langle \frac{1}{f}\,,\bar\partial\,\xi\Big\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|f|\geq\varepsilon}\frac{\bar\partial\xi}{f}\\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|f|\geq\varepsilon}\bar\partial\Big(\frac{\xi}{f}\Big) \overset{\text{Stokes}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|f|=\varepsilon}\frac{\xi}{f},\end{aligned} \tag{2.4}$$
où le cycle $\{|f| = \varepsilon\}$ est orienté de manière à ce que la restriction au support de ce cycle de $d\arg f$ soit une forme positive. On a, compte-tenu des propriétés 2 et 3 ci-dessus, au sens des courants
$$\bar\partial\Big(\frac{1}{f}\Big) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\bar\partial\chi_\varepsilon}{f} = \Big[\bar\partial\Big(\frac{|f|^{2\lambda}}{f}\Big)\Big]_{\lambda=0} = \Big[\bar\partial(|f|^{2\lambda})\,\frac{1}{f}\Big]_{\lambda=0}. \tag{2.5}$$
Voici quelques propriétés du courant résiduel $\bar\partial(1/f)$:

1. Il s'agit d'un courant de bidegré $(0,1)$ et de support l'hypersurface $\{f=0\}$.
2. On dispose de la *formule de Lelong-Poincaré*

$$\bar\partial\Big(\frac{1}{f}\Big)\wedge df = 2i\pi\,[f=0]. \tag{2.6}$$

   Le courant d 'intégration doit ici être entendu avec multiplicités (du point de vue de la géométrie algébrique, on le note aussi $[\mathrm{div}(f)]$ car il s'agit du courant d'intégration attaché au diviseur de f, vue comme section holomorphe du fibré en droites trivial au dessus de Ω). On note aussi souvent le second membre de (2.6)

$$\partial\bar\partial\log|f|^2 = -\bar\partial\partial\log|f|^2 = 2i\pi\,\bar\partial\Big(\frac{\bar f\,df}{|f|^2}\Big) = \bar\partial\Big(\frac{1}{f}\Big)\wedge df. \tag{2.7}$$

3. Le courant résiduel $\bar\partial(1/f)$ peut être d'ordre positif.

Proposition 2.1 (principe de dualité)**.** *Soit f,g deux fonctions holomorphes dans Ω (connexe) avec $f\not\equiv 0$ dans Ω. Il est équivalent de dire que*

$$g\cdot\bar\partial\Big(\frac{1}{f}\Big) = 0$$

(au sens des courants) et que $g\in(f)$ où (f) est l'idéal principal engendré par f dans l'anneau intègre des fonctions holomorphes dans Ω.

Démonstration.

— Si $g=fg'$, on a d'après la règle de Leibniz

$$g\cdot\bar\partial\Big(\frac{1}{f}\Big) = \bar\partial\Big(\frac{g}{f}\Big) = \bar\partial g' = 0.$$

— Si

$$g\cdot\bar\partial\Big(\frac{1}{f}\Big) = 0$$

et que l'on considère la fonction méromorphe $g/f=g'$ et $[g']$ la distribution correspondante [1]. On a

$$\bar\partial([g']) = \bar\partial[g/f] = g\,\bar\partial\Big(\frac{1}{f}\Big) = 0$$

1. On rappelle ici que toute fonction méromorphe g' sur Ω induit une unique distribution sur Ω dont la restriction au complémentaire du lieu polaire est la fonction holomorphe g', cette distribution étant définie comme $u\cdot 1/v$ si g' s'exprime localement u/v.

(la seconde égalité résultant de la formule de Leibniz). D'après l'hypoellipticité de l'opérateur $\bar{\partial}$ (lemme de Dolbeault), on en déduit que g' est en fait holomorphe dans Ω.

$\square$

On peut donc penser $\bar{\partial}(1/f)$ comme « représentant » l'idéal principal (f).

Exemple 2.3. Soient $n = 1$, $\Omega = \mathbb{C}$, $f(z) = z^a$ avec $a \in \mathbb{N}^*$. Un calcul facile montre que

$$\forall\, \xi \in \mathcal{D}(\mathbb{C}),\ \Big\langle \bar{\partial}\Big(\frac{1}{z^a}\Big)\,,\, \xi\, dz \Big\rangle = \frac{2i\pi}{(a-1)!}\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{a-1}\xi\Big)(0).$$

Ceci se voit en utilisant le développement de Taylor de ξ (en $z, \bar{z}$) au voisinage de l'origine. On voit donc que le courant résidu $\bar{\partial}(1/z^a)$ est d'ordre $a-1$. La formule de Lelong-Poincaré (2.6) s'exprime dans ce cas

$$\bar{\partial}\Big(\frac{1}{z^a}\Big) \wedge dz^a = 2i\pi\, a\, [z = 0].$$

La proposition 2.1 se traduit en disant que pour que $g \in \mathcal{O}_0$ soit divisible par z^a, il faut et il suffit que toutes les dérivées de g jusqu'à l'ordre $a-1$, évaluées en $z = 0$, donnent la valeur 0.

Exemple 2.4. Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle dans un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$, nulle en un point $\alpha \in \Omega$ et $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$, identiquement 1 au voisinage de α et nulle au voisinage de tous les autres zéros de f dans Ω. Alors

$$\Big\langle \bar{\partial}\Big(\frac{1}{f}\Big)\,,\, \xi\, dz \Big\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|f| = \varepsilon} \frac{\xi}{f}\, dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|f| = \varepsilon} \frac{1}{f}\, dz = 2i\pi\, \mathrm{res}_\alpha(1/f)$$

où $\mathrm{res}_\alpha(1/f)$ est le coefficient de $1/(z-\alpha)$ dans le développement de Laurent de la fonction méromorphe $1/f$ au voisinage de α.

§1.4. Courants résiduels attachés aux intersections complètes

Soient $f_1, ..., f_p$ $p \leq N$ fonctions holomorphes dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^N$ (ou d'une variété analytique complexe X de dimension N). Si

$$\operatorname{codim} \{f_1 = \cdots = f_p = 0\} = p, \tag{2.8}$$

on dit que $(f_1, ..., f_p)$ définit un idéal (ou un faisceaux d'idéaux) en position d'*intersection complète*.

La multiplication de courants n'est pas en général une opération possible. Toutefois, sous l'hypothèse d'intersection complète (2.8), on peut ([11], 1978) construire un $(0, p)$-courant que l'on notera

$$R^f_{\mathrm{CH}} = \bigwedge_{j=1}^{p} \bar{\partial}\Big(\frac{1}{f_j}\Big).$$

Le courant R^f_{CH} agit de la manière suivante sur les formes de bidegré $(n, n-p)$ de la manière suivante. On choisit $\varepsilon_1(t) >> \varepsilon_2(t) >> \cdots >> \varepsilon_p(t)$ tendant vers 0 lorsque $t \in]0, 1]$ tend vers 0 de la manière « dissymétrique » suivante : pour tout entier k entre 2 et p, $\epsilon_k(t) = o(\varepsilon^{\ell}_{k-1}(t))$ pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}^*$ lorsque t tend vers 0_+. On note ensuite

$$\Gamma_{\varepsilon(t)} = \{|f_1| = \varepsilon_1(t), ..., |f_p| = \varepsilon_p(t)\}$$

et l'on considère cet ensemble comme le support d'un cycle orienté (noté aussi $\Gamma_{\varepsilon(t)}$) en convenant que la forme $\bigwedge_{j=1}^{p} d\,(\arg(f_j))$ est positive sur la partie régulière du support de ce cycle. On pose alors

$$\forall\, \xi \in \mathcal{D}^{n,n-p}(\Omega), \quad \langle R^f_{\mathrm{CH}}, \xi\rangle = \lim_{t\to 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon(t)}} \frac{\xi}{f_1 \cdots f_p}. \tag{2.9}$$

On dispose aujourd'hui d'approches plus « robustes » pour la construction du courant R^f_{CH}. En voici deux :

1. Si l'on considère des fonctions $\chi_1, ..., \chi_p$ de classe C^∞ sur $[0, +\infty]$ telles que $\chi_j(0) = 0$ et $\chi_j(\infty) = 1$ et que l'on pose, pour tout $\varepsilon_j > 0$, $\chi_j^{\varepsilon_j} = \chi_j(|f_j|^2/\varepsilon_j)$, alors

$$R^f_{\mathrm{CH}} = \lim_{\varepsilon=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_p)\to 0} \bigwedge_{j=p}^{1} \frac{\bar{\partial}\chi_j^{\varepsilon_j}}{f_j}$$

   au voisinage de $\{f_1 = \cdots = f_p = 0\}$ dans Ω, la limite étant cette fois inconditionnelle ([7], 2010).

2. La fonction

$$(\lambda_1, ..., \lambda_p) \longmapsto \bigwedge_{j=p}^{1} \bar{\partial}\Big(\frac{|f_j|^{\lambda_j}}{f_j}\Big)$$

se prolonge depuis $\{\mathrm{Re}\,\lambda_1 >> 1, ..., \mathrm{Re}\,\lambda_p >> 1\}$ en une fonction holomorphe dans $\{\mathrm{Re}\,\lambda_1 > -\eta, ..., \mathrm{Re}\,\lambda_p > -\eta\}$ pour un certain $\eta > 0$, à valeurs dans l'espace des courants de bidegré $(0,p)$ (toujours dans un voisinage suffisamment petit de $\{f_1 = \cdots = f_p = 0\}$) et sa valeur en $(0,...,0)$ est égale précisément à R^{f}_{CH} ([30], 2009). Ici encore, on retrouve sous une autre forme le caractère « inconditionnel » de l'approche de $0 \in \mathbb{C}^p$ cette fois par $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p)$.

Voici quelques propriétés du courant R^{f}_{CH} attaché à $(f_1, ..., f_p)$ définissant une intersection complète dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^N$ (ou d'une variété analytique complexe de dimension N).

1. Il s'agit d'un courant de bi-degré $(0,p)$, de support $\{f_1 = \cdots = f_p = 0\}$.
2. On a la formule de Lelong-Poincaré

$$\Big(\bigwedge_{j=1}^{p} \bar\partial\Big(\frac{1}{f_j}\Big)\Big) \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_p = (2i\pi)^p \left[\mathrm{div}(f_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{div}(f_p)\right], \quad (2.10)$$

   où le courant d'intégration figurant au membre de droite est le courant d'intégration sur l'ensemble $\{f_1 = \cdots = f_p = 0\}$, chaque composante irréductible étant affectée de la multiplicité au sens de Hilbert-Samuel au point générique de cette composante.

Théorème 2.1 (théorème de dualité, A. Dickenstein et C. Cessa ([13], 1985), M. Passare ([28], 1988))**.** *Soit g une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^N$ et $\boldsymbol{f} = (f_1, ..., f_p)$ définissant une intersection complète dans Ω. On a l'équivalence*

$$g \cdot R^{f}_{\mathrm{CH}} = 0 \text{ au sens des courants dans } \Omega \iff g \in \big(\mathcal{I}_{\boldsymbol{f}}\big)_{\mathrm{loc}} \text{ dans } \Omega.$$

Une règle importante permet d'envisager le calcul des courants résiduels dans le cadre des intersections complètes.

Théorème 2.2 (loi de transformation (A. Dickenstein, C. Cessa, 1985 [13]))**.** *Soient $f_1, ..., f_p$ et $g_1, ..., g_p$ $2p$ fonctions holomorphes dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^N$, telles que*

$$\mathrm{codim}\,\{f_1 = \cdots = f_p\} = \mathrm{codim}\,\{g_1 = \cdots = g_p\} = p$$

et qu'il existe une matrice A de fonctions holomorphes dans Ω telle que

$$[f_1, ..., f_p] = A \cdot [g_1, ..., g_p].$$

Alors, on a au sens des courants dans Ω,

$$\bigwedge_{j=1}^{p} \bar{\partial}\Big(\frac{1}{g_j}\Big) = \det A \cdot \bigwedge_{j=1}^{p} \bar{\partial}\Big(\frac{1}{f_j}\Big).$$

Remarque 2.1. Si $(f_1, ..., f_p)$ et $(g_1, ..., g_p)$ engendrent le même idéal, il existe une matrice de taille (p, p) à entrées holomorphes dans Ω et de déterminant inversible a telle que $R^f_{\mathrm{CH}} = a \cdot R^g_{\mathrm{CH}}$. La loi de transformation justifie dans le cas des intersections complètes que le courant R^f_{CH} ne dépende que de l'idéal $(f_1, ..., f_p)$ et non du système de générateurs, pourvu toutefois que celui ci définisse une intersection complète.

Exemple 2.5. Si $a_1, ..., a_p$ $(p \leq N)$ sont des entiers strictement positifs, on a, pour toute fonction $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^N)$,

$$\begin{aligned}&\Big\langle \bigwedge_{j=1}^{p} \bar{\partial}\Big(\frac{1}{z_j^{a_j}}\Big)\,,\, \xi\, dz_{p+1} \wedge \cdots \wedge dz_N \wedge d\bar{z} \Big\rangle \\ &= \pm \frac{(2i\pi)^p}{(a_1 - 1)! \cdots (a_p - 1)!} \int \Big(\Big(\frac{\partial^{a_1 + \cdots + a_p}}{\partial z_1^{a_1} \cdots \partial z_p^{a_p}}\Big)(\xi)\Big)(0, z_{p+1}, ..., z_N)\, d\lambda_{2(N-p)}\end{aligned}$$

où $d\lambda_{2(N-p)}$ est la mesure de Lebesgue $2(N-p)$-dimensionnelle lorsque $p < N$ et

$$\Big\langle \bigwedge_{j=1}^{N} \bar{\partial}\Big(\frac{1}{z_j^{a_j}}\Big)\,,\, \xi\, d\bar{z} \Big\rangle = \pm \frac{(2i\pi)^p}{(a_1 - 1)! \cdots (a_p - 1)!} \Big(\Big(\frac{\partial^{a_1 + \cdots + a_p}}{\partial z_1^{a_1} \cdots \partial z_p^{a_p}}\Big)(\xi)\Big)(0, ..., 0)$$

si $p = N$.

§3. Courants et idéaux en situation générale

L'objectif de cette section est d'associer à un idéal un courant résiduel. Nous ne disposerons cependant plus de représentant « canonique » tel R^f_{CH} lorsque l'idéal ne sera plus défini comme une intersection complète.

On peut définir des courants résiduels indépendamment de l'hypothèse d'intersection complète : par exemple ([28], 1988), les courants

$$R^f_{\mathrm{CHP}} = \Big[\bigwedge_{j=p}^{1} \bar\partial\Big(\frac{|f_j|^\lambda}{f_j}\Big)\Big]_{\lambda=0}$$

se présentent comme des moyennes d'intégrales résiduelles. De tels courants vérifient des propriétés intéressantes, par exemple :

— les facteurs anti-commutent

— ce calcul se plie à la règle de Leibniz.

Mais : le support reste de codimension p ; aucune chance donc de réaliser un théoème de dualité sauf si on se trouve dans le cadre intersection complète.

Nous allons donc introduire deux autres types de courants résiduels :

— Les courants de type Bochner-Martinelli (BM) introduits par M. Passare, A. Tsikh et A. Yger ([29], 2000), puis étudiés ensuite par M. Andersson ([2], 2004) ;

— les courants attachés à des résolutions libres d'idéaux (M. Lejeune-Jalabert [[25], 1981], M. Andersson et E. Wulcan [[3], 2007]).

§3.1. Courants résiduels du type Bochner-Martinelli

Ces courants ont été introduits dans [29], puis étudiés ensuite par M. Andersson dans [2], qui a mis en évidence leur rôle d'obstruction dans la réalisation de la division effective.

Soit $\boldsymbol{f} = (f_1, ..., f_m)$ un m-uplet de fonctions holomorphes dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^N$ (ou plus généralement d'une variété analytique complexe de dimension N). Le rôle du courant que nous allons construire sera de « capturer » l'obstruction au problème de division suivant : étant donnée une fonction φ holomorphe dans Ω, appartient-t-elle (localement) à l'idéal engendré par $f_1, ..., f_m$?

On considère le fibré trivial $E = \Omega \times \mathbb{C}^m$ au dessus de X et le repère canonique $(e_1, ..., e_m)$ de ce fibré. Soit $(e_1^*, ..., e_m^*)$ le repère dual du fibré dual E^*. On identifiera $\boldsymbol{f}$ avec la section

$$\boldsymbol{f} = \sum_{j=1}^{m} f_j e_j^*$$

de E^*. On introduit le *complexe de Koszul* ($X = \Omega$ ou plus généralement une variété analytique complexe)

$$0 \longrightarrow \bigwedge^m E \xrightarrow{\delta_{\boldsymbol{f}}} \bigwedge^{m-1} E \xrightarrow{\delta_{\boldsymbol{f}}} \cdots \xrightarrow{\delta_{\boldsymbol{f}}} E \wedge E \xrightarrow{\delta_{\boldsymbol{f}}} E \xrightarrow{\delta_{\boldsymbol{f}}} E^0 = X \times \mathbb{C} \xrightarrow{\delta_{\boldsymbol{f}}} 0$$

où $\bigwedge^k E$ désigne la puissance extérieure $E \wedge \cdots \wedge E$ (k fois) de E, fibré de rang $\binom{m}{k}$ ayant pour repère

$$\{e_I := e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\,; 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m\}$$

et $\delta_{\boldsymbol{f}}$ désigne l'opérateur de contraction avec f défini par $\mathbb{C}$-linéarité et les relations

$$\delta_{\boldsymbol{f}}(e_I) = \sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{\ell-1} f_{i_\ell} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{[e_{i_\ell}]} \wedge \cdots e_{i_k}$$

pour tout multi-indice ordonnée I de longueur $k = 1, ..., m$ (le chapeau signifie que l'on exclut le facteur qu'il coiffe).

Exemple 3.1 (les cas $m = 1$ et $m = 2$)**.**

— Dans le cas $m = 1$ (une fonction f), on a $E = X \times \mathbb{C}$ et le complexe de Koszul s'écrit
$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\delta_f} X \times \mathbb{C} \longrightarrow 0$$
avec $\delta_f(e) = f$.

— Dans le cas $m = 2$ (deux fonctions f_1 et f_2) le morphisme $\delta_{\boldsymbol{f}}$: $E \to X \times \mathbb{C}$ est défini par $\delta_{\boldsymbol{f}}(e_1) = f_1$ et $\delta_{\boldsymbol{f}}(e_2) = f_2$. Le morphisme $\delta_{\boldsymbol{f}}$: $E \wedge E \to E$ est défini par
$$\delta_{\boldsymbol{f}}(e_1 \wedge e_2) = f_1 e_2 - f_2 e_1.$$
Le complexe s'écrit alors
$$0 \longmapsto E \wedge E \xrightarrow{\begin{bmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{bmatrix}} E \xrightarrow{\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}} X \times \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

On a les propriétés suivantes.

1. On a $\delta_{\boldsymbol{f}}^2 = 0$, d'où la terminologie *complexe de Koszul*.

2. Le morphisme $\delta_{\boldsymbol{f}}$ est une anti-dérivation, au sens suivant :

$$\delta_{\boldsymbol{f}}(\alpha \wedge \beta) = \delta_{\boldsymbol{f}}(\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \delta_{\boldsymbol{f}}(\beta) \quad \forall\, \alpha \in \Lambda^k E,\ \forall\, \beta \in \Lambda^\ell E.$$

Proposition 3.1. *Le complexe de Koszul est exact ponctuellement (« pointwise » dans la terminologie anglo-saxonne) au dessus de $X \setminus \{f = 0\}$ au sens suivant : si α est une section locale de $\bigwedge^k E$ au voisinage de $z \in X$ tel que $f(z) \neq 0$ telle que $\delta_{\boldsymbol{f}}(\alpha) = 0$ au voisinage de z, alors il existe une section β de $\bigwedge^{k+1} E$ au voisinage de z telle que $\alpha = \delta_{\boldsymbol{f}}(\beta)$.*

Démonstration. Soit z tel que $f(z) \neq 0$. Il existe une section locale σ de E au voisinage de z telle que $\delta_{\boldsymbol{f}}(\sigma) = 1$ au voisinage de z. Si

$$T\ : \alpha \in \bigwedge^k E \longmapsto \sigma \wedge \alpha \in \bigwedge^{k+1} E,$$

on dispose de la relation d'homotopie

$$T \circ \delta_{\boldsymbol{f}} + \delta_{\boldsymbol{f}} \circ T = \mathrm{Id}.$$

(au voisinage de z). On a en effet

$$\begin{aligned}(T \circ \delta_{\boldsymbol{f}} + \delta_{\boldsymbol{f}} \circ T)(\alpha) &= \sigma \wedge \delta_{\boldsymbol{f}}(\alpha) + \delta_{\boldsymbol{f}}(\sigma \wedge \alpha)\\ &= \sigma \wedge \delta_{\boldsymbol{f}}(\alpha) + 1\,\alpha - \sigma \wedge \delta_{\boldsymbol{f}}(\alpha) = \alpha\end{aligned}$$

au voisinage de z. Ainsi si $\delta_{\boldsymbol{f}}(\alpha) = 0$, on a $\alpha = \delta_{\boldsymbol{f}}(T(\alpha))$ et l'on prend $\beta = T(\alpha)$. $\square$

Armés de cette proposition, nous allons utiliser le complexe de Koszul pour résoudre le problème de division impliquant $\boldsymbol{f}$ localement sur X (et matérialiser l'obstruction).

On commence pour cela à prolonger $\delta_{\boldsymbol{f}}$ et $\bar\partial$ à l'algèbre extérieure au dessus de $E \oplus T^*_{0,1}$, ce en respectant les conventions

$$e_j \wedge d\bar z_k = -d\bar z_k \wedge e_j \quad (j = 1, ..., m, k = 1, ..., N).$$

Ainsi $\delta_{\boldsymbol{f}}$ et $\bar\partial$ anti-commutent.

On notera à partir de maintenant, pour tout $k = 0, ..., m$, et tout $\ell = 0, ..., N$ par $\mathcal{E}_{0,\ell}(\bigwedge^k E)$ le fibré dont les sections sont les $(0,\ell)$-formes à valeurs dans $\bigwedge^k E$.

Si $\varphi = \sum_{j=1}^m \varphi_j\, e_j$ est une section de E dans un ouvert de X, on observe que $\delta_{\boldsymbol{f}}(\varphi) = \sum_{j=1}^m \varphi_j f_j$ dans ce même ouvert. Ainsi on peut formuler le problème de division relatif à la réalisation effective de l'appartenance d'une fonction holomorphe φ à l'idéal $(\boldsymbol{f})$ hors de $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{f}}$ en la question suivante : *peut-on trouver une section ψ de E au dessus de $X \setminus \mathcal{Z}_{\boldsymbol{f}}$ telle que $\delta_{\boldsymbol{f}}(\psi) = \varphi$ dans $X \setminus \mathcal{Z}_{\boldsymbol{f}}$?*

Nous allons étudier tout d'abord le problème local. Soit $z \in X \setminus \mathcal{Z}_{\boldsymbol{f}}$.

D'après la proposition 3.1 il existe (si l'on invoque le lemme de partition de l'unité) une section u_1 de E au voisinage de z telle que $\delta_{\boldsymbol{f}}(u_1) = \varphi$. Si $\bar\partial u_1 = 0$, c'est gagné. Sinon, on a

$$\delta_{\boldsymbol{f}}(\bar\partial u_1) = -\bar\partial(\delta_{\boldsymbol{f}}(u_1)) = -\bar\partial\varphi = 0.$$

Toujours d'après la Proposition 3.1, il existe donc u_2 section de $\mathcal{E}_{0,1}(\bigwedge^2 E)$ au voisinage de z telle que $\bar\partial u_1 = \delta_{\boldsymbol{f}}(u_2)$. On continue de la sorte :

$$\delta_{\boldsymbol{f}}(\bar\partial u_2) = -\bar\partial(\delta_{\boldsymbol{f}} u_2) = -\bar\partial^2(u_1) = 0$$

au voisinage de z. Si l'on poursuit de la sorte on génère une suite $(u_k)_{k\geq 1}$ avec u_k section de $\mathcal{E}_{0,k-1}(\bigwedge^k E)$ au voisinage de z pour tout $k \geq 1$ et

$$\delta_{\boldsymbol{f}}(u_k) = \bar\partial(u_{k-1})$$

au voisinage de z. On finira par arriver à $\bar\partial(u_{\min(m,N+1)}) = 0$ au voisinage de z pour des raisons de degré.

On rappelle maintenant le lemme de Dolbeault, affirmant l'exactitude du complexe de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(X,F) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}_{0,1}(F) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}_{0,2}(F) \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \tag{3.1}$$

pour tout fibré holomorphe F. Si l'on pose $M := \min(m, N+1)$, on peut donc résoudre au voisinage de z

$$u_M = \bar\partial(v_M).$$

Toujours au voisinage de z, on a

$$\bar\partial\big(u_{M-1} + \delta_{\boldsymbol{f}}(v_M)\big) = \bar\partial(u_{M-1}) - \delta_{\boldsymbol{f}}(u_M) = 0.$$

On peut donc résoudre au voisinage de z

$$u_{M-1} + \delta_{\boldsymbol{f}}(v_M) = \bar{\partial}(v_{M-1}).$$

À nouveau

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\big(u_{M-2} + \delta_{\boldsymbol{f}}(v_{M-1})\big) = \bar{\partial}(u_{M-2}) - \delta_{\boldsymbol{f}}\big(u_{M-1} + \delta_{\boldsymbol{f}}(v_M)\big) \\ = \bar{\partial}(u_{M-2}) - \delta_{\boldsymbol{f}}(u_{M-1}) = 0.\end{aligned}$$

On poursuit de la sorte en résolvant chaque fois au voisinage de z

$$u_k + \delta_{\boldsymbol{f}}(v_{k+1}) = \bar{\partial}(v_k)$$

avec v_k section de $\mathcal{E}_{0,k-2}(\bigwedge^k E)$ au voisinage de z. Lorsque l'on arrive à $k=2$, on remarque que

$$\psi = u_1 + \delta_{\boldsymbol{f}}(v_2)$$

définit une section holomorphe locale de E au voisinage de z telle que l'on ait $\delta_{\boldsymbol{f}}(\psi) = \varphi$.

On remarque en suivant cette construction que si à chaque étape on peut résoudre le $\bar{\partial}$ globalement dans un ouvert de $X \setminus \mathcal{Z}_{\boldsymbol{f}}$, alors on disposera d'une section holomorphe globale ψ de E dans cet ouvert telle que, toujours dans cet ouvert, on ait $\delta_{\boldsymbol{f}}(\psi) = \varphi$.

Se pose maintenant le problème de « passer au travers » de l'« obstacle » $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{f}}$.

On remarque pour cela que le lemme de Dolbeault reste valable au niveau non plus des formes différentielles (exactitude du complexe de faisceaux (3.1)), mais au niveau des courants (on peut remplacer $\mathcal{E}_{0,\ell}(\bigwedge^k E)$ dans (3.1) par le faisceau dont les sections au dessus d'un ouvert de X sont les $(0,\ell)$-courants dans cet ouvert, à valeurs dans $\bigwedge^k E$). Ainsi, si l'on peut trouver une extension u_k au sens des courants (au travers de $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{f}}$) avec

$$\delta_{\boldsymbol{f}}(u_k) = \bar{\partial}(u_{k-1}) \quad (\forall\, k \geq 2) \quad \text{et} \quad \delta_{\boldsymbol{f}}(u_1) = \varphi, \tag{3.2}$$

on parviendra suivant le schéma développé précédemment à réaliser au voisinage de chaque point z de X une section holomorphe locale de E telle que $\delta_{\boldsymbol{f}}(\psi) = \varphi$.

Pour ce faire nous allons construire un courant u explicitement lorsque $\varphi = 1$. L'obstruction au passage « au travers de $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{f}}$ » dans la démarche précédente mettra précisément en évidence le courant résiduel.

On introduit l'opérateur

$$\nabla_{\boldsymbol{f}} := \delta_{\boldsymbol{f}} - \bar\partial$$

que l'on fera agir sur fibrés sont les $(0,\ell)$-formes à valeurs dans $\bigwedge^k E$ ou bien (éventuellement) les $(0,\ell)$-courants à valeurs dans $\bigwedge^k E$. On a $\nabla^2 = 0$ et

$$\nabla_{\boldsymbol{f}}(\alpha\wedge\beta) = \nabla_{\boldsymbol{f}}\alpha\wedge\beta + (-1)^{\deg\alpha}\alpha\wedge\nabla_{\boldsymbol{f}}\beta$$

(règle d'anti-dérivation) pour toutes formes α,β (l'un de ces deux objets pouvant aussi être un courant), où $\deg\alpha$ désigne le degré total de la forme α.

Si l'on pose $u := u_1 + \cdots + u_M$, on observe qu'un moyen de « résumer » le jeu d'équations (3.2) est

$$\nabla u = \varphi. \tag{3.3}$$

Nous allons donc résoudre dans un premier temps $\nabla u = 1$ hors de $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{f}}$ de la manière suivante.

— On pose

$$\sigma := \frac{\sum_{j=1}^m \bar f_j\, e_j}{\|\boldsymbol{f}\|^2}.$$

Clairement $\delta_{\boldsymbol{f}}(\sigma) = 1$ hors de $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{f}}$.

— On pose ensuite (formellement en ce qui concerne les trois premières égalités)

$$\begin{aligned} u^{\boldsymbol{f}} &:= \frac{\sigma}{\nabla_{\boldsymbol{f}}\sigma} = \frac{\sigma}{\delta_{\boldsymbol{f}}(\sigma) - \bar\partial\sigma} = \frac{\sigma}{1-\bar\partial\sigma} \\ &= \sum_{\ell\geq 1}\sigma\wedge(\bar\partial\sigma)^{\ell-1} = \sum_{\ell\geq 1}\frac{(\sum_{j=1}^m \bar f_j\, e_j)\wedge\big(\sum_{j=1}^m \overline{\partial f_j}\wedge e_j\big)^{\wedge^{\ell-1}}}{\|\boldsymbol{f}\|^{2\ell}}. \end{aligned}$$

Un calcul formel simple, lié au fait que $\nabla^2 = 0$ et aux règles d'anti-commutation, conduit à la vérification de

$$\nabla u^{\boldsymbol{f}} = 1 \quad (\text{dans } X\setminus\mathcal{Z}_{\boldsymbol{f}}). \tag{3.4}$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème 3.1 (M. Passare, A. Tsikh, A. Yger [29], 2000, M. Andersson [2], 2004)**.** *La forme $u^{\boldsymbol{f}}$ s'étend en un courant*

$$U^{\boldsymbol{f}} := \Big[\|\boldsymbol{f}\|^{2\lambda}\, u_{\boldsymbol{f}}\Big]_{\lambda=0}$$

dans la variété analytique complexe X toute entière[2].

Remarque 3.1. On peut aussi définir le courant $U^{\boldsymbol{f}}$ alternativement par

$$\big\langle U^{\boldsymbol{f}}, \varphi\big\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int \chi\Big(\frac{|f|^2}{\varepsilon}\Big)\, u^{\boldsymbol{f}}\, \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}^{N,N}(X,E),$$

où χ est une fonction de classe C^∞ de $[0,\infty]$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\chi(0)=0$ et $\chi(1)=1$. La preuve de ce résultat repose sur l'utilisation d'une résolution des singularités (on utilise le théorème d'Hironaka [19]).

On définit alors le courant résidu $R^{\boldsymbol{f}}$ par

$$\nabla_{\boldsymbol{f}}(U^{\boldsymbol{f}}) =: 1 - R^{\boldsymbol{f}}. \tag{3.5}$$

On a par un calcul facile

$$\nabla_{\boldsymbol{f}}(\|\boldsymbol{f}\|^{2\lambda} u^{\boldsymbol{f}}) = \nabla_{\boldsymbol{f}}(\|\boldsymbol{f}\|^{2\lambda}) \wedge u^{\boldsymbol{f}} + \|\boldsymbol{f}\|^{2\lambda}\, \nabla_{\boldsymbol{f}} u^{\boldsymbol{f}} = -\bar\partial(\|\boldsymbol{f}\|^{2\lambda}) \wedge u^{\boldsymbol{f}} + \|\boldsymbol{f}\|^{2\lambda}$$

et par conséquent

$$R^{\boldsymbol{f}} = \Big[\bar\partial(\|\boldsymbol{f}\|^{2\lambda}) \wedge u^{\boldsymbol{f}}\Big]_{\lambda=0}. \tag{3.6}$$

On note

$$R^{\boldsymbol{f}} = \sum_{I=\{i_1,\dots,i_k\}\subset\{1,\dots,m\}} R_I^{\boldsymbol{f}} \wedge e_I \quad \Big(e_I := e_{i_k} \wedge \cdots \wedge e_{i_1}\Big)$$

où

$$R_I^{\boldsymbol{f}} := \Big[\bar\partial(\|\boldsymbol{f}\|^{2\lambda}) \wedge \sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{\ell-1} \frac{\bar f_{i_\ell} \bigwedge_{\substack{\kappa=1\\ \kappa\neq\ell}}^{k} \overline{df_{i_\kappa}}}{\|\boldsymbol{f}\|^{2k}}\Big]_{\lambda=0}.$$

On a en particulier

$$R^{\boldsymbol{f}}_{\{1,\dots,m\}} = \Big[\bar\partial(\|\boldsymbol{f}\|^{2\lambda}) \wedge \boldsymbol{f}^*[B_m]\Big]_{\lambda=0},$$

où

$$B_m := \sum_{\ell=1}^{m} (-1)^{\ell-1} \frac{\bar w_\ell \bigwedge_{\substack{\kappa=1\\ \kappa\neq\ell}}^{k} d\bar w_\kappa}{\|w\|^{2m}}$$

désigne le *noyau de Bochner-Martinelli*. C'est sous cette forme que le courant $R^{\boldsymbol{f}}$ a été introduit pour la première fois dans [29].

---

2. Il faut comprendre ici que l'on considère une application holomorphe de $\{\mathrm{Re}\,\lambda >> 1\}$ dans l'espace des courants sur X, application dont on suit le prolongement analytique jusqu'à la valeur $\lambda = 0$, ce prolongement analytique se trouvant de fait être holomorphe dans un demi-plan $\{\mathrm{Re}\,\lambda > -\eta\}$ pour un certain $\eta > 0$.

Exemple 3.2. Dans le cas $m = 1$, on a $u^{\boldsymbol{f}} = e_1/f$ et $U^{\boldsymbol{f}} = (1/f)\, e_1$ où $1/f$ est la distribution valeur principale introduite précédemment (voir (2.1)). On a donc $R^{\boldsymbol{f}} = \bar\partial(1/f) \wedge e_1$.

Cette construction continue à fonctionner dans le contexte suivant :

— La variété ambiante X est une variété analytique complexe (on s'est de fait déjà placé dans ce cadre) :

— Le fibré $E \to X$ est un fibré holomorphe de rang m quelconque que l'on suppose équipé d'une métrique hermitienne $|\ |$.

— $\boldsymbol{f}\ : X \to E^*$ est une section holomorphe globale du fibré E^*.

— $\sigma = \sigma_{\boldsymbol{f}}$ est une section de E telle que $\delta_{\boldsymbol{f}}(\sigma) = 1$ hors de $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{f}}$, que l'on choisit de norme minimale ($\sigma_{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{f}^*/|\boldsymbol{f}|^2$).

On étendra ultérieurement cette construction en considérant à la place du complexe de Koszul un complexe de fibrés génériquement localement exact. C'est présisément cette exactitude que nous exploiterons.

Voici quelques propriétés de ces courants.

1. Comme $U^{\boldsymbol{f}} = 1$ hors de $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{f}}$, le support de $R^{\boldsymbol{f}}$ est inclus dans l'ensemble $\{f_1 = \cdots = f_m = 0\}$ [29].
2. Le courant $R^{\boldsymbol{f}}$ se scinde en
$$R^{\boldsymbol{f}} = R_1^{\boldsymbol{f}} + \cdots + R^{\boldsymbol{f}}_{\min(m,N)}$$
où $R_k^{\boldsymbol{f}}$ est un $(0,k)$-courant à valeurs dans le fibrée $\bigwedge^k E$ pour tout k entre 1 et $\min(m,N)$. Ces courants (comme d'ailleurs les courants résiduels introduits dans le cadre des intersections complètes) sont dits *pseudo-méromorphes* suivant une terminologie introduite par M. Andersson et E. Wulcan en 2010 [4] ; ce sont essentiellement des images directes de courants de la forme $\big(\bigwedge_{j=1}^p \bar\partial(1/z^{\alpha_j})\big) \wedge \varpi$ où les z^{α_j} sont des monômes en position d'intersection complète et ϖ une $(0,q)$ forme lisse. Pour un tel courant semi-méromorphe, nous disposons du *principe de dimension* suivant : « *si α est un courant semi-méromorphe de bidegré $(\star, p)$ supporté par un sous-ensemble analytique de codimension strictement supérieure à p, alors $\alpha = 0$* ». Suivant ce principe, on peut affirmer que
$$R^{\boldsymbol{f}} = \sum_{k=\operatorname{codim}\{f_1=\cdots=f_m=0\}}^{\min(m,N)} R_k^{\boldsymbol{f}}.$$

3. On dispose de la généralisation suivante de la formule de Lelong-Poincaré, sous la forme suivante

$$“R \wedge df'' := \sum_{I=\{i_1,\dots,i_k\}} R_I^{\boldsymbol{f}} \wedge df_{i_k} \wedge \cdots \wedge df_{i_1} = [Z]$$

où $[Z]$ est un *cycle généralisé* [6]. Les multiplicités intervenant comme nombres de Lelong locaux sont les nombres de Segre locaux de l'idéal $(\boldsymbol{f})$.

4. On dispose avec ce courant $R^{\boldsymbol{f}}$ d'une réalisation de la *dualité* au sens suivant [2] : ≪ *si* $\varphi \in \mathcal{O}(X)$ *vérifie* $\varphi \cdot R^{\boldsymbol{f}} = 0$ *au sens des courants, alors* φ *appartient à l'idéal* $(\mathcal{I}_{\boldsymbol{f}})_{\rm loc}$ ≫. En effet, on a

$$\nabla_{\boldsymbol{f}}(\varphi \cdot U^{\boldsymbol{f}}) = \varphi \, \nabla_{\boldsymbol{f}}(U^{\boldsymbol{f}}) + \nabla_{\boldsymbol{f}}(\varphi) \wedge U^{\boldsymbol{f}} = \varphi \, \nabla_{\boldsymbol{f}}(U^{\boldsymbol{f}}) = \varphi - \varphi \cdot R^{\boldsymbol{f}} = \varphi$$

car $\nabla_{\boldsymbol{f}} \varphi = \delta_{\boldsymbol{f}}(\varphi) - \bar\partial \varphi = 0 - 0$ du fait que φ est holomorphe. Si de plus l'on peut résoudre globalement de $\bar\partial$ au fil de la méthode décrite précédemment, alors, on peut, sous l'hypothèse $\varphi \cdot R^{\boldsymbol{f}} = 0$ au sens des courants, trouver explicitement $\psi \in \mathcal{O}(X, E)$ avec $\delta_{\boldsymbol{f}}(\psi) = \varphi$, c'est-à-dire réaliser effectivement l'appartenance de φ à l'idéal $(\boldsymbol{f})$ dans $\mathcal{O}(X)$.

5. Si $\varphi \in \mathcal{O}(X)$ vérifie $|\varphi|/\|\boldsymbol{f}\|^k$ localement bornée sur X, ce qui signifie que $f \in \big(\overline{\mathcal{I}^k_{\boldsymbol{f}}}\big)_{\rm loc}$, on a $R_I^{\boldsymbol{f}} = 0$ pour tout multi-indice I de $\{1, \dots, m\}$ de longueur au plus k.

6. Dans le cas où $m \leq n$ et $\boldsymbol{f}$ définit une intersection complète dans X, on a

$$R^{\boldsymbol{f}} = \Big(\bigwedge_{j=1}^{m} \bar\partial \Big(\frac{1}{f_j} \Big) \Big) \wedge e_m \wedge \cdots \wedge e_1.$$

On est à ce point en mesure de donner la preuve de l'un des résultats d'effectivité annoncés dans la section 1.

Preuve du théorème de Briançon-Skoda (théorème 1.3). Il suffit de combiner les points (4) et (5) avec l'expression de $R^{\boldsymbol{f}}$ explicitée au point (2).

§4. Courants résidus et problèmes d'effectivité globaux : le théorème de Ein-Lazarsfeld [14]

§4.1. Quelques préliminaires sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ et son groupe de Picard

On rappelle que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est réalisé géométriquement comme le quotient de l'ouvert affine $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, ..., 0)\}$ par la relation d'équivalence de co-linéarité $\sim$. On équipe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ d'une structure de variété analytique complexe de dimension n, l'atlas étant défini par les cartes

$$\tau_j \ : [z_0 : \cdots : z_n] = \left[\frac{z_0}{z_j} : \cdots : 1 : \cdots : \frac{z_n}{z_j}\right] \in \{[z_0 : \cdots : z_n] \, ; \, z_j \neq 0\} = U_j$$
$$\longmapsto \left(\frac{z_{j+1}}{z_j}, ..., \frac{z_{j-1}}{z_j}\right) \in \mathbb{C}^n.$$

Le groupe $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ des classes d'équivalences de fibrés (holomorphes) en droites sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est isomorphe au groupe des diviseurs de Cartier quotienté par le sous-groupe des diviseurs de Cartier. Dans le cas particulier de la variété analytique complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, on rappelle que ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}$. On notera cet isomorphisme $d \mapsto \mathcal{O}(d)$.

La classe d'équivalence de fibrés $\mathcal{O}(-1)$ est représentée par le *fibré tautologique* défini par

$$L := \{([z_0 : \cdots : z_n], \xi) \, ; \, \xi \in \mathbb{C}\,(z_0, ..., z_n)\}$$

(ensemblistement). Le cocycle associé à $\mathcal{O}(-1)$ est (si θ_ι désigne le morphisme de trivialisation de L au dessus de l'ouvert de carte U_ι)

$$g_{jk} := \theta_j \circ \theta_k^{-1} \ : [z] \in U_j \cap U_k \longmapsto \frac{z_j}{z_k}.$$

Soit en effet

$$\theta_j : \big([z], \xi = \lambda_j(z_0/z_j, ..., 1, ..., z_n/z_j\big) \longmapsto ([z], \lambda_j)$$

la trivialisation de L au dessus de U_j ; on observe que

$$\lambda_j \frac{z_\ell}{z_j} = \lambda_k \frac{z_\ell}{z_k} \quad \forall\, k \neq j, \ell, \ \forall\, z \in U_j \cap U_k \ ;$$

par conséquent

$$\lambda_j = \frac{z_j}{z_k}\,\lambda_k \quad \forall\, j,k,\ \forall\, z \in U_j \cap U_k\ ;$$

ainsi

$$\theta_{jk} := \theta_j \circ \theta_k^{-1} : \quad ([z],\lambda_k) \longmapsto \Big([z], \lambda_j = \frac{z_j}{z_k}\,\lambda_k =: g_{jk}\lambda_k\Big).$$

L'élément neutre du groupe de Picard est $\mathcal{O}(1) = (\mathcal{O}(-1))^*$. Pour tout $d \in \mathbb{Z}$, on a $\mathcal{O}(d) = (\mathcal{O}(-d))^*$ et le cocycle attaché à $\mathcal{O}(d)$ est

$$[z] \in U_j \cap U_k \longmapsto g_{jk}^{(d)}(z) = \frac{z_k^d}{z_j^d} \quad \forall\, j,k.$$

Les sections holomorphes de $E \simeq \mathcal{O}(d)$ (lorsque $d \in \mathbb{N}$) sont les polynômes homogènes de degré d[3]. Le fibré $\mathcal{O}(d)$ n'a, lui, aucune section globale autre que la section nulle lorsque $d < 0$.

§4.2. La mise en place du problème de division dans le cadre de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

Soient $E^1, ..., E^m$ m copies (distinctes) du fibré trivial $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ au dessus de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (on note e_j le repère $[z] \to 1$ de E_j) et $L \simeq \mathcal{O}(d)$ ($d \in \mathbb{N}^*$). Soit

$$E = (L^{-1} \otimes E^1) \oplus \cdots \oplus (L^{-1} \otimes E^m).$$

Soient $f_1, ..., f_m$ des sections de L, que l'on peut donc toutes assimiler à des fonctions polynomiales homogènes de même degré d en les $n+1$ coordonnées homogènes $z_0, ..., z_n$ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Ainsi

$$\boldsymbol{f} = \sum_{j=1}^m f_j\, e_j^*$$

est une section globale de E^*.

Soit $\rho \geq d$ et φ une section globale d'un fibré $S \simeq \mathcal{O}(\rho)$; on peut assimiler φ à un polynôme homogène de degré ρ.

3. En effet, si s est une section de $\mathcal{O}(d)$, on exprime s au dessus de l'ouvert de carte U_j par $s([z]) = \sigma_j([z])\,\theta_j^{-1}([z],1)$. Chaque fonction « coordonnée » σ_j est holomorphe par hypothèses dans U_j et l'on a compte tenu de la définition du cocycle $(g_{jk})_{j,k}$ de $\mathcal{O}(d)$, on a $\sigma_j = \sigma_k\, z_k^d / z_j^d$ dans $U_j \cap U_k$; on en déduit le fait que l'on puisse identifier s avec une fonction polynomiale homogène de degré d.

Fixons nous ici l'objectif de résoudre (si bien sûr cela s'avère possible)

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} q_j f_j \tag{4.1}$$

où $q_1, ..., q_m$ sont des polynômes homogènes de degré $\rho - d$ en $z_0, ..., z_n$ en utilisant pour cette résolution les courants de Bochner-Martinelli. Le problème (4.1) se ramène à trouver une section q du fibré $E \otimes S$ telle que

$$\varphi = \delta_{\boldsymbol{f}}(q). \tag{4.2}$$

Soit $R^{\boldsymbol{f}}$ le courant résidu associé au complexe de Koszul

$$0 \longrightarrow \bigwedge^{m} E \xrightarrow{\delta_{\boldsymbol{f}}} \bigwedge^{m-1} E \xrightarrow{\delta_{\boldsymbol{f}}} \cdots \xrightarrow{\delta_{\boldsymbol{f}}} E \wedge E \xrightarrow{\delta_{\boldsymbol{f}}} E \xrightarrow{\delta_{\boldsymbol{f}}} E^0 = X \times \mathbb{C} \xrightarrow{\delta_{\boldsymbol{f}}} 0.$$

Si l'on suppose $\varphi \cdot R^{\boldsymbol{f}} = 0$ au sens des courants sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, on trouve

$$u = \varphi \cdot U^{\boldsymbol{f}} = u_1 + \cdots + u_{\min(m,n+1)}$$

tel que $\nabla_{\boldsymbol{f}} u = \varphi$, chaque u_k $(k = 1, ..., \min(m, n+1))$ étant un courant de bidegré $(0, k-1)$ à valeurs dans $\bigwedge^k E$.

Si de plus on est capable de résoudre globalement le $\bar{\partial}$, on pourra à partir de u calculer en suivant la démarche développée lors de la preuve de la proposition 3.1 une section q de $E \otimes S$ telle que $\delta_{\boldsymbol{f}}(q) = \varphi$. Notre problème d'effectivité sera ainsi résolu. Il nous faut pour cela résoudre de proche en proche (en partant de $k = \min(m, n)$ et en diminuant successivement les valeurs de k) des équations du type

$$\bar{\partial} v_k = u_k + \delta_{\boldsymbol{f}}(v_{k+1}) \tag{4.3}$$

(le second membre est ici un courant de bidegré $(0, k-1)$ à valeurs dans $S \otimes \bigwedge^k E$).

Il convient donc de rappeler ce que l'on sait de la cohomologie de Dolbeault de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Théorème 4.1 (cohomologie de Dolbeault de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$)**.** *On a*

$$H^{0,q}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathcal{O}(\ell)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 < q < n \\ 0 \quad \text{si} \quad q = n \quad \text{et} \quad \ell \geq -n. \end{cases}$$

Il résulte de l'annulation de ces groupes de cohomologie de Dolbeault, en relation avec la démarche décrite ci-dessus, que :

— lorsque $m \leq n$, toutes les équations (4.3) se résolvent ;

— lorsque $m > n$, il convient pour initier la démarche de savoir résoudre $\bar{\partial} v_{n+1} = u_{n+1}$. Or u_{n+1} est un $(0,n)$ courant à valeurs dans $S \otimes \bigwedge^{n+1} E$ qui se présente comme une somme directe de copies de $\mathcal{O}(\rho-(n+1)d)$. La solubilité n'est possible en général compte tenu du théorème 4.1 que lorsque

$$\rho - (n+1)d \geq -n \Longleftrightarrow \rho \geq (n+1)d - n.$$

On peut donc énoncer la Proposition suivante.

Proposition 4.1. *Soit $\varphi \in \mathcal{O}(\rho)$ telle que $\varphi \cdot R^{\boldsymbol{f}} = 0$ et l'une <u>ou</u> l'autre des deux clauses suivantes est satisfaite :*

— soit $m \leq n$;

— soit $\rho \geq (n+1)d - n$.

Il existe alors, si $F_j(X_1, ..., X_n) := f_j(1, X_1, ..., X_n)$ pour $j = 1, ..., m$, des polynômes Q_j, $1 \leq j \leq m$, dans $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ tels que

$$\varphi(1, X_1, ..., X_n) := \Phi(X_1, ..., X_n) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(X_1, ..., X_n)\, F_j(X_1, ..., X_n)$$

$$\textit{avec} \quad \max_{1 \leq j \leq m} \deg(F_j Q_j) \leq \rho.$$

§4.3. Preuve du théorème de Ein-Lazersfeld [14]

Revenons tout d'abord sur la définition des *composantes distinguées de Fulton-MacPherson* (ici du faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_{\boldsymbol{f}}$) qui a été déjà esquissée dans la section 1.5.

Soient $\boldsymbol{f} = (f_1, ..., f_m)$ un idéal homogème de $\mathbb{C}[X_0, ..., X_n]$. Rappelons que l'on réalise dans un premier temps l'éclatement normalisé

$$\pi \ : \widehat{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

le long du faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_{\boldsymbol{f}}$. Le morphisme π est ici un morphisme propre. Ici $\widehat{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}$ n'est pas une variété analytique complexe, mais seulement un espace analytique *normal*, au sens suivant : *toute fonction définie au voisinage*

V d'un point singulier de $\widehat{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}$, holomorphe sur $V \cap (\widehat{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})})_{\rm reg}$ et localement bornée sur V, est en fait holomorphe dans V. On peut affirmer en un certain sens[4] que le couple $(\widehat{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}, \pi)$ réalise « la plus petite » configuration $(\tilde{X}, \tilde{\pi})$ où

— $\tilde{X}$ est un espace analytique normal ;
— le morphisme $\tilde{\pi}$ est un morphisme analytique propre ;
— le faisceau d'idéaux $\tilde{\pi}^*[\mathcal{I}_{\boldsymbol{f}}]$ est localement principal sur $\tilde{X}$.

De plus, π réalise ici un biholomorphisme entre $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}/\mathcal{I}_{\boldsymbol{f}})$ et $\widehat{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})} \setminus \mathrm{Supp}\big(\mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}}/\pi^*[\mathcal{I}_{\boldsymbol{f}}]\big)$. Alors le faisceau localement principal d'idéaux $\pi^*[\mathcal{I}_{\boldsymbol{f}}]$ définit un diviseur de Cartier sur l'espace analytique $\widehat{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}$. Notons $E = \sum_\iota \nu_\iota Y_\iota$ le diviseur de Weil que l'on peut attacher à ce diviseur de Cartier[5]. Les sous-ensembles analytiques $\mathcal{Z}_\iota := \pi(Y_\iota)$ (il y a certainement énormément de redondance dans cette énumération) sont précisément les *sous-variétés distinguées* attachées au faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_{\boldsymbol{f}}$ au sens de Fulton-MacPherson.

On admettra ici que l'on dispose des estimations géométriques suivantes [14], héritées du théorème géométrique de Bézout :

$$\sum_\iota \nu_\iota d^{\dim \mathcal{Z}_\iota} \deg \mathcal{Z}_\iota \leq d^n \quad (d = \max_{1\leq j\leq m} (\deg f_j)). \tag{4.4}$$

On en retiendra juste la conséquence (affaiblie) suivante :

$$\forall\, \iota, \quad \nu_\iota \leq d^{\mathrm{codim}(\mathcal{Z}_\iota)}. \tag{4.5}$$

L'observation suivante sera pour nous importante. Dire que $\varphi_z \in \big(\overline{\mathcal{I}_{\boldsymbol{f}}}\big)_z$ (lorsque $z \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$) équivaut à dire que

$$\begin{gathered}\frac{|\varphi|}{\|\boldsymbol{f}\|} \ \text{bornée au voisinage de } z \\ \iff \frac{|\pi^*[\varphi]|}{\|\pi^*[\boldsymbol{f}]\|} \ \text{bornée au voisinage de } \ \pi^{-1}(\{z\}) \iff \\ \pi^*[\varphi] \text{ s'annule à l'ordre au moins } \nu_\iota \text{ sur chaque } Y_\iota \text{ tel que } z \in \pi(Y_\iota) = \mathcal{Z}_\iota.\end{gathered} \tag{4.6}$$

4. On dispose en fait d'une *propriété d'universalité* : *toute autre configuration* $(\tilde{X}, \tilde{\pi})$ *obéissant aux trois exigences ci-dessous se factorise au travers de* $(\widehat{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}, \pi)$.

5. On appelle ce diviseur *diviseur exceptionnel de l'éclatement normalisé de* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *le long du faisceau d'idéaux* $\mathcal{I}_{\boldsymbol{f}}$.

On rappelle ici l'énoncé du théorème de Ein-Lazarsfeld 1.6 [14].

Théorème. *Soient* $F_1, ..., F_m, \Phi$, $m+1$ *éléments de* $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ *tels que* $F_1, ..., F_m$ *soient de degrés au plus* d *et que* $|\Phi|/\|\boldsymbol{F}\|^\mu$ *soit localement bornée au voisinage de* $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{F}}$. *Il existe alors des polynômes* $Q_1, ..., Q_m$ *tels que*

$$\Phi = \sum_{j=1}^{m} Q_j F_j, \quad \max_{1 \le j \le m} \deg(Q_j F_j) \le \max\big(\deg \Phi + \mu d^{c_\infty}\,,\,(n+1)d - n\big).$$

Démonstration. On choisit

$$\rho \ge \max(\deg \Phi + \mu\, d^{c_\infty}, (n+1)d - n)$$

et l'on pose

$$\varphi \;:\; [z] \longmapsto z_0^{\rho - \deg \Phi}\, \phi(z) \quad \text{où} \quad \phi(z) = z_0^{\deg \Phi}\, \Phi(z/z_0)$$

de manière à ce que φ puisse être considérée comme une section globale d'un fibré $S \simeq \mathcal{O}(\rho)$. Pour tout $j = 1, ..., m$, on note également f_j l'homogénéisé de F_j multiplié par $z_0^{d - \deg F_j}$; les f_j peuvent ainsi être considérées comme des sections globales d'un fibré $L \simeq \mathcal{O}(d)$, comme dans la sous-section 4.2. Au vu de la proposition 4.1, il suffit pour prouver le théorème de vérifier que $\varphi \cdot R^{\boldsymbol{f}} = 0$ au sens des courants sur la variété $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

On rappelle qu'une condition suffisante pour que $\varphi \cdot R^{\boldsymbol{f}} = 0$ au sens des courants sur la variété $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est que $|\varphi|/\|\boldsymbol{f}\|^\mu$ soit localement bornée au voisinage de tout point $[z]$ de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, où $\mu := \max(m, n)$ (voir la propriété 5 des courants résidus de type Bochner-Martinelli en fin de la section 3.1).

On sait par hypothèses que dans $\mathbb{C}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus \{z_0\}$, la fonction $|\Phi|/\|\boldsymbol{F}\|^\mu$ est localement bornée. En homogénéisant les F_j et Φ, on en déduit que $|\varphi|/\|\boldsymbol{f}\|^\mu$ est localement bornée sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus \{z_0 = 0\}$, donc que la restriction du courant $\varphi \cdot R^{\boldsymbol{f}} = 0$ à l'ouvert $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus \{z_0 = 0\}$ est nulle.

Soit maintenant $[z]$ un point de l'hyperplan à l'infini $H_\infty = \{z_0 = 0\}$ qui appartient aussi à $\{\boldsymbol{f} = 0\}$ et $\mathcal{Z}_\iota = \pi(Y_\iota)$ une composante distinguée de $\mathcal{I}_{\boldsymbol{f}}$ à laquelle le point $[z]$ appartient. On distingue ici deux cas.

— Si $\mathcal{Z}_\iota$ n'est pas entièrement incluse dans $H_\infty = \{z_0 = 0\}$, i.e rencontre $\mathbb{C}^n$, il résulte du fait que $|\Phi|/\|\boldsymbol{F}\|^\mu$ est localement bornée sur l'ouvert dense $\mathbb{C}^n$ que $\pi^*[\varphi]$ s'annule (d'après (4.6)) à un ordre au moins égal à ν_ι le long de Y_ι.

— Si $\mathcal{Z}_\iota$ est entièrement incluse dans $H_\infty = \{z_0 = 0\}$, c'est z_0 qui s'annule sur $\mathcal{Z}_\iota$ au voisinage de $[z]$; par conséquent $\pi^*[z_0]$ s'annule identiquement sur Y_ι au voisinage d'une pré-image de $[z]$ appartenant à Y_ι. On en déduit que

$$\pi^*[\varphi] = \pi^*\Big[z_0^{\rho - \deg \Phi}\,\phi\Big] = \pi^*[z_0^{\rho-\deg\Phi}]\,\pi^*[\phi]$$

s'annule à l'ordre

$$\rho - \deg \Phi \geq \mu\, d^{c_\infty} \geq \mu\, d^{\mathrm{codim}\mathcal{Z}_\iota} \geq \mu\, \nu_\iota$$

le long de Y_ι au voisinage d'une pré-image de z appartenant à Y_ι.

On conclut dans les deux cas ci-dessus que φ appartient localement à la clôture intégrale de $\overline{(\boldsymbol{f})^\mu}$ au voisinage de tout point $[z]$ appartenant à la fois à $\{\boldsymbol{f} = 0\}$ et à l'hyperplan à l'infini $\{z_0 = 0\}$. Comme ceci est aussi vrai, on l'a vu précédemment, au voisinage de tout point de $\mathbb{C}^n \cap \{\boldsymbol{f} = 0\}$, on en déduit bien que $\varphi \cdot R^f \equiv 0$ dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ tout entier, ce qu'il fallait justement démontrer. □

Remarque 4.1 (à propos du résultat de M. Hickel (théorème 1.4, [17]))**.** Dans le résultat de M. Hickel, on remplace d^{c_∞} par son majorant plus grossier d^n. La preuve est identique, mais les bornes utilisées pour la majoration des ν_ι sont alors moins précises.

Remarque 4.2 (à propos du théorème de Macaulay (théorème 1.5, [26])**.** Si les F_j n'ont aucun zéro commun, même à l'infini, alors $R^{\boldsymbol{f}}$ est le courant nul et l'on retrouve l'estimation $\rho \leq (n+1)d - n$ du théorème de Macaulay.

§4.4. Le théorème de Max Nœther

Dans la même veine que le résultat de Ein-Lazarsfeld, on peut citer ici un autre résultat d'effectivité historiquement et conceptuellement important, dû à Max Nœther en 1873.

Théorème 4.2 (théorème de Max Nœther, 1873 [27])**.** *Soient $F_1, ..., F_n, \Phi$ $n+1$ éléments de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$. On suppose que $\boldsymbol{F}^{-1}(0)$ (où $\boldsymbol{F} = (F_1, ..., F_n)$) est une sous variété algébrique de dimension 0 (i.e. un sous-ensemble fini) de $\mathbb{C}^n$, que $\boldsymbol{F}$ n'a aucun zéro à l'infini et que Φ appartient à l'idéal $(\boldsymbol{F})$* [6]*. Il*

6. Il faut et il suffit pour cela que Φ appartienne localement à l'idéal engendré par les F_j au voisinage de tous les points du sous-ensemble fini $\boldsymbol{F}^{-1}(0)$ de $\mathbb{C}^n$.

existe alors $Q_1, ..., Q_n$ dans $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ tels que

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} Q_j F_j \quad \text{et} \quad \max_{1\leq j\leq n} \deg(Q_j F_j) \leq \deg \Phi.$$

Démonstration. Au vu de la proposition 4.1, toutes les résolutions du $\bar{\partial}$ en jeu sont licites (puisque $m = n \leq n$ ici) et le problème se ramène donc à démontrer que $\varphi \cdot R^{\boldsymbol{f}} = 0$ au sens des courants. On note φ l'homogénisation de degré $\deg \Phi$ de Φ, soit $\varphi(z_0, ..., z_n) = z_0^{\deg \Phi} \Phi(z/z_0)$. Dans $\mathbb{C}^n$, on a $\mathrm{codim}(\boldsymbol{F}^{-1}(0)) = \mathrm{codim}(\mathbb{C}^n \cap \boldsymbol{f}^{-1}(0)) = n$. Il est équivalent de dire que $\varphi \cdot R^{\boldsymbol{f}} = 0$ dans $\mathbb{C}^n$ et de dire que Φ appartient localement à $(\boldsymbol{F})$ au voisinage de tout point de $\mathbb{C}^n$ ($F_1, ..., F_n$ définissent en effet dans ce cas une intersection complète dans $\mathbb{C}^n$ et le courant $R^{\boldsymbol{f}}$ coincide à une constante près dans $\mathbb{C}^n$ avec le courant de Coleff-Herrera $\bigwedge_{j=1}^n \bar{\partial}(1/F_j)$). Comme $\boldsymbol{F}$ ne s'annule pas à l'infini, les zéros de $\mathcal{I}_{\boldsymbol{f}}$ sont tous dans $\mathbb{C}^n$. Le support de $R^{\boldsymbol{f}}$ est donc inclus dans $\mathbb{C}^n$. Le fait que $\varphi \cdot R^{\boldsymbol{f}} = 0$ dans $\mathbb{C}^n$ implique donc que $\varphi \cdot R^{\boldsymbol{f}} = 0$ dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Le résultat est ainsi démontré. □

§4.5. Une version « relative » du théorème de Ein-Lazarsfeld

Dans cette sous-section, nous allons formuler une version « relative » du théorème de Ein-Lazarsfeld. Cette fois $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sera remplacé par une sous-variété algébrique réduite [7] de dimension pure égale à n de $\mathbb{C}^N$.

Théorème 4.3 (M. Andersson, E. Wulcan, 2015 [5])**.** *Soit V une sous-varété algébrique de dimension pure de $\mathbb{C}^N$, d'adhérence X dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Il existe un entier μ_0 ne dépendant que de V et de son plongement dans $\mathbb{C}^N$ tel que, si $F_1, ..., F_m, \Phi$ sont $m+1$ éléments de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_N]$ de degrés au plus d tels que $|\Phi|/\|\boldsymbol{f}\|^{\mu_0+\mu}$ ($\mu := \inf(n, m)$) soit localement bornée sur V, il existe $Q_1, ..., Q_m \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_N]$ tels que*

$$\begin{aligned} &\Phi = \sum_{j=1}^{m} Q_j F_j \quad \text{sur} \quad V \\ &\qquad \text{avec} \quad \max_{1\leq j\leq m} \deg(Q_j F_j) \leq \max(\deg \Phi + (\mu + \mu_0)\, d^{c_\infty} \deg X, \beta), \end{aligned} \tag{4.7}$$

7. Ceci signifie que les multiplicités ne sont pas prises en compte, ou encore que le faisceau d'idéaux structurel $\mathcal{O}_V$ est *radical*, c'est-à-dire que $\mathcal{I}_V = \sqrt{\mathcal{I}_V}$ si $\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N}/\mathcal{I}_V$.

où

- *l'entier positif* c_∞ *désigne le maximum des codimensions (dans l'adhérence* $\bar{V}$ *de* V *dans* $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$*) des sous-variétés distinguées du faisceau d'idéaux* $\mathcal{I}_{\boldsymbol{f}} \oplus \mathcal{I}_{\bar{V}}$ *qui sont entièrement incluses dans l'hyperplan à l'infini de* $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ *;*
- *l'entier* β *est égal à*

$$\beta = (d-1)\min(m, n+1) + \mathrm{reg}(X)$$

où $\mathrm{reg}(X)$ *désigne la régularité au sens de Castelnuovo de* X*.*

Démonstration. Nous ne donnerons pas ici la preuve de ce théorème. Disons simplement que la première entrée

$$\deg \Phi + (\mu + \mu_0)\, d^{c_\infty} \deg X$$

dans la prise de maximum est contrainte, si φ désigne l'homogénéisation de Φ, par la clause d'annulation $\varphi \cdot R^{V,\boldsymbol{f}} = 0$ d'un certain courant résidu de Bochner-Martinelli « relatif » (clause assurant si elle est réalisée l'appartenance locale de φ au faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_{\boldsymbol{f}} \oplus \mathcal{I}_{\bar{V}}$) tandis que la seconde entrée β dans cette prise de maximum est contrainte par les exigences requises aux fins des résolutions du $\bar{\partial}$ nécessaires pour passer d'une appartenance locale à une appartenance globale. □

Remarque 4.3. L'entier μ_0 ne dépendant que de V (et de son plongement dans $\mathbb{C}^N$) a été introduit dans le cadre local par M. Hochster et C. Huneke [20] (1990), d'où la terminologie. La version locale du théorème 4.3, sans les estimations quantitatives, est due à C. Huneke ([21], 1992).

Références

[1] C. D'Andrea, T. Krick, M. Sombra, Height of varieties in multiprojective spaces and arithmetic Nullstellensätze, Annales Scientifiques de l'ENS, fascicule 4 (2013), 549-627.

[2] M. Andersson, Residue currents and ideals of holomorphic functions, Bull. Sci. Math. **128** (2004), no. 6, pp. 481–512.

[3] M. Andersson, E. Wulcan, Residue currents with prescribed annihilator ideals, Ann. Sci. École Norm. Sup. **40** (2007) pp. 985–1007.

[4] M. Andersson, E. Wulcan, Decomposition of residue currents, J. Reine Angew. Math. **638** (2010), 103-118.

[5] M. Andersson, E. Wulcan, Global effective version of Briançon-Skoda-Huneke theorem, Invent. math. **200** (2015), pp. 607-651.

[6] M. Andersson, H. Samuelsson, E. Wulcan, A. Yger, Segre numbers, a generalized King formula and local intersections, J. Reine angew. Math, **728**, 2017, pp. 105-136.

[7] J. E. Björk, H. Samuelsson, Regularizations of residue currents, J. Reine angew. Math **649** (2010), 33–54.

[8] D. W. Brownawell, Bounds for the degrees in the Nullstellensatz, Ann. of Math. **126** (1987), pp. 577-591.

[9] J. Briançon, H. Skoda, Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de $\mathbb{C}^n$, Comptes Rendus Acad. Sciences Paris, Sér. A, **278** (1974), pp. 949-951.

[10] C. A. Berenstein, A. Yger, Effective Bézout identities in $\mathbb{Q}[z_1, ..., z_n]$, Acta Math. **166** (1991), pp. 69-120.

[11] N. Coleff, M. Herrera, *Les courants résiduels associés à une forme méromorphe*, Lecture Notes in Math. 633, Springer-Verlag, Berlin, New-York, 1978.

[12] J. P. Demailly, *Complex Analytic and Differential Geometry*, disponible en ligne sur le site http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/∼demailly/manuscripts/agbook.pdf

[13] A. Dickenstein, C. Sessa, Canonical representative in moderate cohomology, Invent. Math. **80** (1985), pp. 417–434.

[14] L. Ein, R. Lazarsfeld, A geometric effective Nullstellensatz, Inventiones Math. **137** (1999), pp. 427–448.

[15] G. Hermann, Die Frage der endlich vielen Schritte in der theorie der polynomideale, Math. Ann. **95** 1926, pp. 736-788.

[16] M. Herrera, D. Lieberman, Residues and principal values on complex spaces, Math. Ann. **194** (1971), pp. 259–294.

[17] M. Hickel, Solution d'une conjecture de C. Berenstein et A. Yger et invariants de contact à l'infini, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **51** (2001), no. 3, pp. 707–744.

[18] D. Hilbert, Ueber die Theorie der algebraischen Formen, Mathematische Annalen, **36** (1890) (4), 473–534.

[19] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Ann. of Math. **79**, 1 et 2 (1964), pp. 109–203 et 205–326.

[20] M. Hochster, C. Huneke, Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), pp. 31–116.

[21] C. Huneke, Uniform bounds in Nœtherian rings, Inventiones math. **107** (1992), no. 1, pp. 203-223.

[22] Z. Jelonek, *On the effective Nullstellensatz*, Inventiones Math. **162** (2005), no. 1, pp. 1–17.

[23] T. Krick, L. M. Pardo, M. Sombra, Sharp estimates for the arithmetic Nullstellensatz, Duke Math. J. **109** (2001), no. 3, pp. 521–598.

[24] J. Kollár, Sharp effective Nullstellensatz, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), pp. 963-975.

[25] M. Lejeune-Jalabert, Liaison et résidu, pp. 233–240 in Algebraic Geometry, J.M. Aroca, R. Buchweitz, M. Giusti, M. Merle, eds., Lecture Notes in Math. 961, Springer-Verlag, Berlin, New-York, 1982.

[26] F. Macaulay, *The algebraic theory of modular forms*, Cambridge University Press, 1916.

[27] M. Nœther, Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen, Math. Ann. **6** (1873), no. 1, pp. 351-359.

[28] M. Passare, Residues, currents, and their relation to ideals of holomorphic functions, Math. Scand. **62** (1988), no. 1, pp. 75–152.

[29] M. Passare, A. Tsikh, A. Yger, Residue currents of the Bochner-Martinelli type, Publicacions Matematiques **44** (2000), pp. 85–117.

[30] H. Samuelsson, Analytic continuation of residue currents, Ark. Mat. **47** (2009), no. 1, pp. 127–141.

[31] M. Sombra, A sparse effective Nullstellensatz, Adv. in Appl. Math. **22** (1999) pp. 271–295.